

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

UM ELEMENTO FINITO DE CASCA FINA PARA ANÁLISE
ELASTOPLÁSTICA DE ESTRUTURAS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

FLÁVIO TAKANE IMAEDA

FLORIANÓPOLIS, NOVEMBRO DE 1992

UM ELEMENTO FINITO DE CASCA FINA PARA ANÁLISE
ELASTOPLÁSTICA DE ESTRUTURAS

FLÁVIO TAKANE IMAEDA

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA

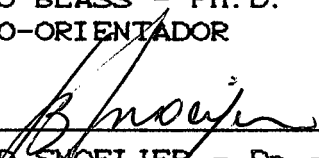
ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO PROJETO,
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA



CARLOS ALBERTO DE CAMPOS SELKE - Ph. D.
ORIENTADOR



ARNO BLASS - Ph. D.
CO-ORIENTADOR



BEREND SMOELJER - Dr. -Ing.
COORDENADOR DO CURSO

BANCA EXAMINADORA:



CARLOS ALBERTO DE CAMPOS SELKE - Ph. D.
PRESIDENTE



ARNO BLASS - Ph. D.



CLÓVIS SPERB DE BARCELLOS - Ph. D.

JUN SÉRGIO ONO FONSECA - M. Eng. Mec.

AGRADECIMENTOS

A COSIPA, pelo incentivo e apoio ao desenvolvimento de novas tecnologias;

aos professores Carlos Alberto de Campos Selke e Arno Blass, pela orientação deste trabalho.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	1
1.1	Introdução	1
1.1.1	Descrição do processo de desempenho	1
1.2	Levantamento bibliográfico	4
1.2.1	Modelos experimentais	4
1.2.2	Análise utilizando métodos numéricos	8
1.3	Escopo do trabalho	11
2	SOLUÇÃO NUMÉRICA DOS PROBLEMAS DA ELASTOPLASTICIDADE	13
2.1	Introdução	13
2.2	Equações de equilíbrio	13
2.3	Formulação por elementos finitos	18
2.4	Atualização das tensões	20
2.5	Integração da matriz rigidez	21
2.6	Solução numérica do sistema não linear	22
2.6.1	Método de Newton-Raphson	23
2.6.2	Método de Newton-Raphson modificado	24
2.6.3	Método BFGS	25
2.6.4	Comentários sobre os métodos iterativos	29
2.7	Critério de convergência	30
3	RELAÇÃO CONSTITUTIVA	32
3.1	Introdução	32
3.2	Relação constitutiva infinitesimal	32
3.2.1	Critério de escoamento de von Mises	33
3.2.2	Equações de Prandtl-Reuss	34
3.2.3	Relação constitutiva elastoplástica	34
3.2.4	Critério de carregamento plástico	37
3.2.5	Relação constitutiva para o estado plano de tensões	38
3.2.6	Generalização da relação constitutiva	40
3.3	Integração da relação constitutiva	41

4	ELEMENTO DE CASCA	45
4.1	Introdução	45
4.2	Descrição dos graus de liberdade do elemento	45
4.3	Matriz da relação deformação/graus de liberdade nodais	49
4.4	Descrição da geometria	51
4.5	Determinação das bases locais	52
4.6	Campo de deslocamentos	55
4.7	Deformações devidas aos efeitos de membrana	56
4.7.1	Determinação de ϵ_{oss} e ϵ_{oti}	56
4.7.2	Determinação do cisalhamento γ_{ost}	57
4.8	Efeitos de flexão	58
4.8.1	Cálculo das rotações segundo as direções t e n (θ_t e θ_n)	59
4.8.2	Eliminação dos graus de liberdade do centróide	63
4.8.3	Determinação das variações de curvatura ϵ_{ss} , ϵ_{tt} e ϵ_{st}	63
5	RESULTADOS NUMÉRICOS	65
5.1	Introdução	65
5.2	Casos lineares	65
5.2.1	"Patch test"	65
5.2.2	Placa quadrada	69
5.2.3	Telhado cilíndrico	73
5.2.4	Cilindro puncionado	73
5.2.5	Semi-esfera	76
5.2.6	Viga retilínea	81
5.3	Casos não lineares	81
5.3.1	Placa tracionada	83
5.3.2	Placa quadrada engastada com deformação plástica	85
5.3.3	Casca esférica puncionada - "snap through"	89
5.3.4	Casca cilíndrica com grandes deslocamentos e deformação plástica	91

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

95

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

126

APÊNDICES

1	Transformação do princípio variacional	97
2	Relação entre deformações e graus de liberdade nodais	100
3	Matriz (b) relativa à relação deformação/graus de liberdade nodais	105
4	Implementação da matriz rigidez	121

SIMBOLOGIA

D	- tensor taxa de deformação
σ	- tensor de Cauchy
τ	- tensor de Kirchhoff
τ^*	- tensor taxa de variação de Jaumann do tensor tensão de Kirchhoff
t	- tensor tensão nominal ou 1 ^o Piola-Kirchhoff
$\{v\}$	- matriz coluna das velocidades
$\{D\}$	- matriz coluna do tensor taxa de deformação
$\{\dot{P}\}$	- matriz coluna da taxa de variação das forças externas
$\{\dot{\psi}\}$	- matriz coluna da taxa de variação dos graus de liberdade nodais
$[C]$	- matriz da relação constitutiva
$[K]$	- matriz rigidez linear
$[K_s]$	- matriz rigidez da tensão inicial
$[N]$	- matriz das funções interpolação
$[B]$	- matriz da relação velocidade/taxa de variação dos graus de liberdade nodais
J	- relação entre o volume no estado de referência e o volume na configuração em consideração
S	- área
S_T	- superfície onde foram especificadas as condições de contorno de Neumann
V	- volume
S_{ij}	- tensor deviatórico do tensor de Cauchy
$f()$	- função escoamento
k	- parâmetro de encruamento
$\bar{\sigma}, \sigma_0$	- tensão de escoamento

ϕ_i, ψ_j - funções interpolação

X, x, y - vetor posição em coordenadas globais

RESUMO

Um elemento finito de casca fina com nove nós, em cuja formulação se utilizam as hipóteses de Kirchhoff discretizadas, é desenvolvido para a solução de problemas elastoplásticos em estruturas. Utiliza-se uma formulação lagrangiana atualizada, baseada no princípio dos trabalhos virtuais.

Para representar o comportamento do material, é adotada a lei de escoamento de Prandtl-Reuss, associada ao critério de escoamento de von Mises e à lei de encruamento isotrópico.

A validade e o bom desempenho do elemento de casca implementado foram constatados através da análise de diversos problemas envolvendo placas e cascas.

ABSTRACT

A thin shell finite element with nine nodes, whose formulation uses the discrete Kirchhoff hypothesis, is developed to solution structural elasto-plastic problems. An updated lagrangian formulation, based on the virtual work principle, is utilized.

The Prandtl-Reuss flow rule, associated with the Von Mises yield criterion and with the isotropic hardening, is used to model the behavior of the material.

The validity and good performance of the developed shell finite element was verified through the analysis of several plates and shells problems.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

1.1. Introdução.

A compreensão dos fenômenos envolvidos nos processos de conformação mecânica é de grande interesse para a indústria devido à constante necessidade de aperfeiçoar a qualidade dos seus produtos.

Um modelamento matemático, que reflita a realidade física, ajuda a melhor controlar os parâmetros intervenientes no processo.

Até recentemente, a elaboração dos modelos matemáticos era feita, predominantemente, através da montagem de experimentos adequados para cada processo de fabricação em estudo. Ultimamente, a redução dos custos computacionais tornou possível a abordagem através dos métodos numéricos.

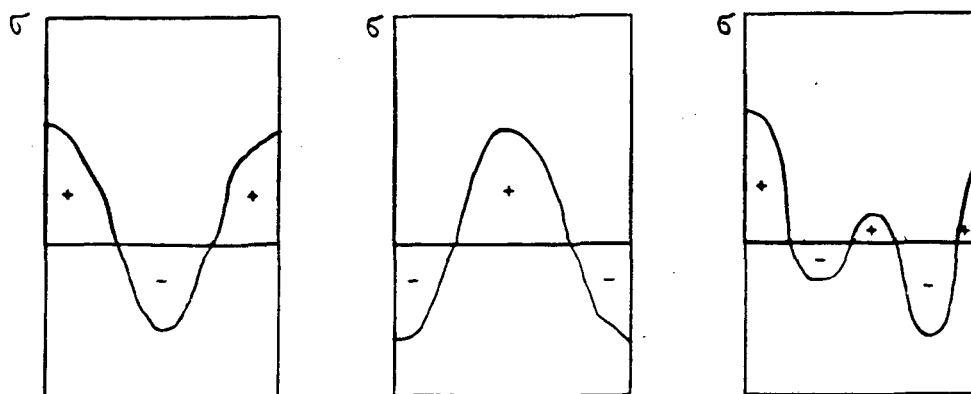
O presente trabalho apresenta o desenvolvimento de uma ferramenta a ser usada na modelação dos processos de desempenamento de chapas finas a frio usando-se o método dos elementos finitos.

1.1.1. Descrição do processo de desempenamento.

No processo de laminação podem ocorrer deformações plásticas não-uniformes dando origem a tensões residuais nas tiras.

Dependendo das condições ditadas pela espessura, módulo de elasticidade e níveis de tensão, podem surgir fenômenos de

instabilidade locais, os quais são visualizados através de defeitos de planicidade das chapas. A Figura 1 ilustra este tipo de imperfeição.



Distribuição de tensões ao longo da largura

+ tração
- compressão

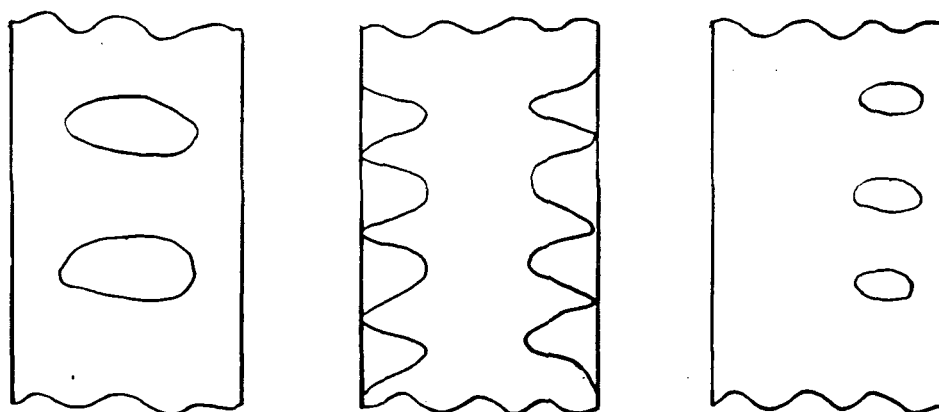


Figura 1 - Defeito de planicidade em chapas.

Os defeitos dessa natureza são posteriormente corrigidos pelas desempenadeiras, cujo funcionamento está esquematizado na Figura 2. Esta ilustração mostra que a distância vertical entre os rolos superiores e inferiores varia linearmente ao longo da máquina, caracterizando a técnica da regulagem em cunha.

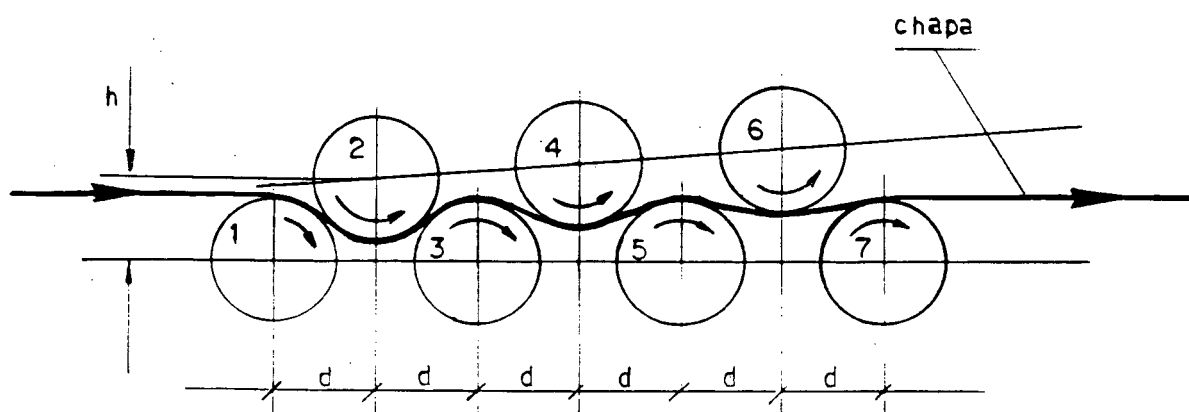


Figura 2 - Desenho esquemático de uma desempenadeira.

Neste processo, o material sofre uma série de flexões alternadas, à medida que passa sob os rolos, fazendo com que uma parte da camada se plastifique e se distenda.

O formato ondulado dos defeitos favorece a ocorrência de instabilidades locais, pois a força de contato aplicada pelos rolos provoca grandes deslocamentos, porém com pequenas deformações. Isto faz com que as deformações aconteçam de maneira seletiva. São bem maiores nas regiões sem defeito do que em locais com empenamento. Estes efeitos tendem a anular as deformações irregulares iniciais que provocam o problema do empenamento.

O controle do processo se faz regulando a distância entre os rolos superiores e inferiores que é dada pela cota h mostrada na Figura 2.

Adicionalmente, as tiras podem ser submetidas a tensões de tração na direção longitudinal à chapa. Os equipamentos que assim funcionam são denominados desempenadeiras sob tensão.

Os artigos que tratam desta categoria de máquina ([37] a [39], [42], [44] a [49], [51] e [52]) usam modelos matemáticos simples. Os resultados são satisfatórios apesar de tais modelos não considerarem a história do carregamento.

O interesse deste trabalho, contudo, se concentra nos processos sem tensão. Nessa área encontram-se poucos trabalhos de modelamento matemático ([40], [41], [43]). Segundo Pankin [40], os erros que estes apresentam podem ser significativos se no modelamento não for considerada a história do carregamento.

1.2. Levantamento bibliográfico.

O levantamento bibliográfico foi dividido em diversos itens, de acordo com as etapas envolvidas na implementação do método dos elementos finitos. As referências bibliográficas a respeito dos modelos obtidos experimentalmente forneceram subsídios importantes para a determinação das hipóteses simplificadoras.

1.2.1. Modelos experimentais.

Grande parte da literatura a respeito do desempenamento procura obter expressões relativamente simples para o cálculo de deformações a partir dos dados geométricos e das propriedades dos

materiais.

Observa-se que em comum apresentam algumas hipóteses: a) estado plano de tensões, b) material isotrópico, c) desprezam o efeito Bauschinger, d) desprezam o efeito do atrito entre o rolo e a chapa, e) admitem pequenas deformações, f) supõem que a seção permanece plana e perpendicular à linha média, g) não levam em conta a velocidade de deformação, h) a geometria da chapa é conhecida a priori, não levando em consideração o problema de contato, i) desprezam as tensões de tração na direção transversal ao sentido de movimento da chapa.

Os autores abaixo estudam as desempenadeiras sob tensão. Admitem, basicamente, que a chapa apresenta a mesma curvatura que os rolos, como ilustra a Figura 3.

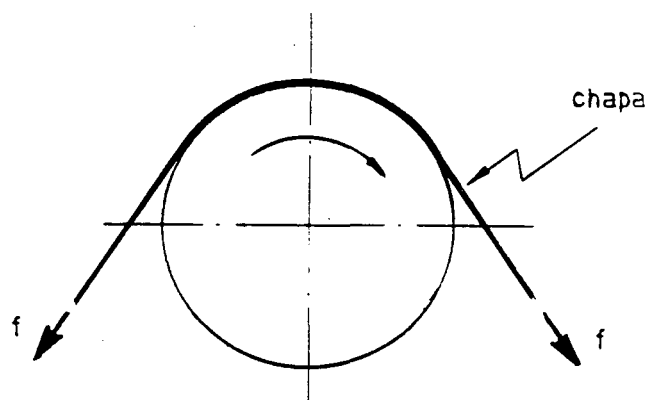


Figura 3 - A curvatura da chapa é suposta coincidente com a da chapa.

Roberts e Sheppard [51] mostram que o resultado do modelo matemático é tanto melhor, quanto maior for o valor da

força de tração f mostrada na Figura 3. A explicação para isso está associada ao fato de que o aumento de f ajuda a forçar a chapa contra o rolo, agindo em favor da hipótese mencionada no parágrafo anterior.

Yoshizaki [47] e Kawaguchi [48] apresentam um tipo de desempenadeira para chapas muito finas (espessura menor que 0,3 mm). Estabelecem um critério de medida do defeito de planicidade, dado pela expressão

$$\text{grau de empeno} = \frac{\sum h_i}{l} \cdot 100 \quad (\%),$$

com os h_i medidos segundo a Figura 4.

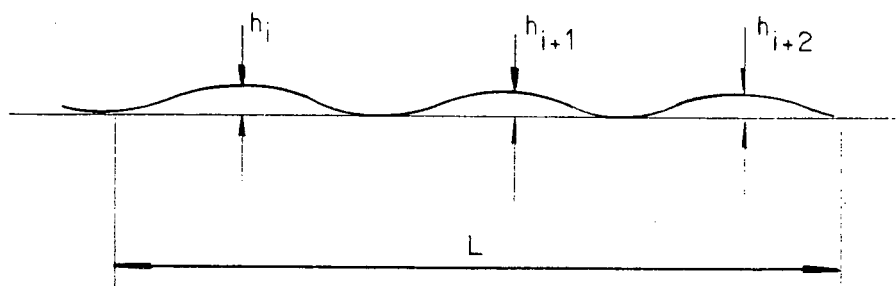


Figura 4 - Critério para a medida do empenamento.

Os autores mostram que existe uma correlação estatística entre o defeito, medido segundo o critério mostrado na expressão acima, a localização dos empenamentos e o grau de alongamento necessário para eliminar o problema. Estes dados são úteis para o

estabelecimento dos valores orientativos de regulação do equipamento.

Thompson [38] obtém uma expressão analítica para calcular o encurvamento da tira sem precisar levar em consideração a hipótese de que a chapa adquira a mesma curvatura que o rolo. Kinnavy [42], finalmente, determina a força mínima de tração f , mostrada na Figura 3, para que essa hipótese, da concordância entre as curvatura do rolo e da chapa, seja válida.

Hanaki e Kato [46] fazem um trabalho experimental medindo a distribuição de pressão no arco de contato entre a chapa e o rolo para vários tipos de materiais da tira.

Patula [37] mostra que o modelamento adequado requer a subdivisão da análise em cinco casos diferentes, os quais dependem basicamente de como é a distribuição das tensões ao longo da espessura.

Stark [39] faz uma análise comparativa entre os modelos propostos por Kinnavy [42], Sheppard & Roberts [50] e Patula [37].

A seguir consideram-se os modelos para desempenadeiras sem tensionamento.

A principal diferença em relação aos anteriores reside no fato de que a chapa não consegue atingir a mesma curvatura dos rolos. A consequência de tal fato é que, agora, os pontos de contato entre a chapa e o rolo não são conhecidos a priori. Surge, então, a necessidade de resolver o problema de contato.

Stenudd [41] supõe que a chapa adquira uma curvatura cilíndrica, cujo raio depende da distância vertical e do espaçamento horizontal entre os rolos, da tensão de escoamento e do módulo de elasticidade do material. O autor não leva em consideração os efeitos de membrana, apesar da existência do

acoplamento com os efeitos de flexão, uma vez que os deslocamentos verticais impostos à chapa são duas a seis vezes maiores que a espessura da mesma.

Pankin, Thiele e Ziegler [40] fazem uma análise mostrando que a principal fonte de erros dos modelos analíticos está na dificuldade em conseguir expressões que considerem a história do carregamento. Segundo os autores, as forças de contato entre o rolo e a chapa, calculadas por modelos analíticos, levam a erros de até 200%.

1.2.2. Análise utilizando métodos numéricos.

A seguir comentam-se as diversas abordagens de análise de conformação mecânica com o uso do método de elementos finitos.

O levantamento bibliográfico restringiu-se aos artigos que optaram pelas hipóteses simplificadoras que desprezam os efeitos térmicos e dinâmicos. Essas hipóteses são comuns aos trabalhos experimentais mencionados anteriormente (item 1.2.1.).

Nagtegaal & Rebelo [1] e Nagtegaal & Jong [2] descrevem os pontos importantes para a simulação do processo de conformação mecânica, que são a escolha dos tensores, da relação constitutiva e seu método de integração, do algoritmo para a automação do problema de contato e modelamento do atrito. Recomendam a formulação lagrangiana atualizada para a plasticidade, pois a relação constitutiva, que vem na forma incremental, melhor descreve a realidade física, se referida à configuração atualizada. Segundo os autores, os grandes deslocamentos produzem o efeito adicional da distorção excessiva das malhas dos elementos finitos, prejudicando a precisão das respostas; tais consequências

podem ser minoradas sobrepondo-se uma nova malha sobre a geometria deformada (rezoning) ou introduzindo alguma técnica de refino de malha (remeshing).

McMeeking & Rice [5] elaboraram uma formulação fundamentada no princípio variacional incremental de Hill [34]. Esta formulação é desenvolvida de tal forma a permitir sua implementação por meio de uma adaptação simples de um programa de elementos finitos da elastoplasticidade infinitesimal. Os autores generalizam uma relação constitutiva elastoplástica infinitesimal, de maneira a possibilitar o uso desta em casos com não-linearidade geométrica. Para isso, admitem que a matriz C da relação entre o incremento do tensor de Cauchy e o incremento de deformação, é apropriada para estabelecer, agora, a relação entre o tensor tensão de Jaumann e o tensor taxa de deformação. Essa formulação foi utilizada posteriormente por Kikuchi & Cheng [21] e por Chandra [14], respectivamente, nas análises dos processos de extrusão e estampagem.

Kikuchi & Cheng [21] propõem uma formulação geral para casos com grandes deformações e contato com atrito. O problema de contato é considerado em duas direções locais: na direção normal à interface impõe-se a condição usual de que o material em processamento não pode penetrar na matriz. Já na direção tangencial, as forças de atrito são formuladas através do critério de deslizamento isotrópico de Coulomb, que tem a mesma forma usualmente adotada na plasticidade

Um processo de conformação, com análises já efetuadas por elementos finitos, e que tem aspectos semelhantes com o desempenamento, é a estampagem de chapas. O artigos abaixo abordam este tipo de trabalho.

Wang e Budiansky [6] modelam o processo de estampagem em formatos arbitrários de peças, considerando apenas o efeito de membrana para um material elastoplástico. Germain, Chung e Wagoner [27], incluem a influência da velocidade de deformação, utilizando um modelo rígido-viscoplástico.

Os efeitos de flexão, para os casos axissimétricos, são incluídos no trabalho de Wang e Tang [17]. Chandra [14] também considera a flexão e emprega a formulação proposta por McMeeking e Rice [5] para a construção da matriz rigidez.

A partir deste ponto, a revisão bibliográfica será dirigida para artigos que tratem especificamente de elementos de casca aplicados a problemas da elastoplasticidade.

Abayakoon [29] desenvolveu o método de tiras finitas (finite strip method) para o uso em grandes deslocamentos com deformação plástica. A vantagem deste método consiste basicamente em fazer analogia com o comportamento de uma viga, diminuindo a quantidade de graus de liberdade do elemento. No entanto, as funções de interpolação do elemento contêm séries de Fourier que precisam ser escolhidas, adequadamente, para cada tipo de condição de contorno.

Dinis & Owen [15] implementam o uso do elemento de casca fina conhecido como Semiloof [22] para uma descrição lagrangiana atualizada. Eles utilizam o modelo da rótula plástica, admitindo que a plastificação ocorra instantaneamente em toda a seção, e para isso adotam o critério de escoamento de Ilyushin [26], expresso em função de momentos fletores e tensões resultantes. Os incrementos de rotação são supostos pequenos e os termos não lineares das relações deformações-deslocamentos foram desprezados.

Parish [33] estende o uso do elemento de casca de 4 nós,

desenvolvido por MacNeal [23], para os problemas de plasticidade com não linearidade geométrica. Tanto a integração da matriz rigidez, como o cálculo das forças nodais são feitos dividindo-se a casca em diversas camadas de mesma espessura, e calculando-se as variáveis no ponto médio de cada uma destas. A divisão por camadas, quando se tem deformação plástica, visa permitir a adequada descrição do seu complexo perfil de distribuição das tensões. O mesmo método de integração por camadas é visto no trabalho de Yang & Saigal [36].

Nagtegaal e Slater [19] desenvolveram um elemento de casca fina semelhante ao Semiloof [22] porém com menor número de nós, simplificando a formulação. A geometria e os efeitos de membrana são descritos por funções de interpolação lineares, e isto causa problemas de excessiva rigidez para o cisalhamento de membrana [61]. Para suplantar esta deficiência, os autores calculam a matriz rigidez supondo que este cisalhamento seja constante e igual ao valor calculado no centróide do elemento. Idêntico procedimento foi implantado por MacNeal [23].

Podem-se encontrar trabalhos com elementos híbridos ([8] e [11]), ou mistos [18], para a área de plasticidade. Atualmente, no entanto, a sua aplicação se restringe a casos simples. No levantamento bibliográfico efetuado não se encontram exemplos utilizados em processos de conformação.

1.3. Escopo do trabalho.

O presente trabalho pretende desenvolver ferramentas computacionais para a análise do processo de desempenamento pelo método de elementos finitos; abrange, especificamente, a

implementação de um elemento de casca fina com não linearidades de material e de geometria, sem considerar os efeitos dinâmicos. Não está incluído o estudo do problema de contato.

O comportamento físico foi descrito através da formulação lagrangiana atualizada, conforme proposto por McMeeking & Rice [5] e Kikuchi & Cheng [21]. Foi escolhido o elemento de casca proposto por Nagtegaal & Slater [19]. Na relação constitutiva foi utilizado o critério de escoamento de Von Mises, a teoria incremental de Prandtl-Reuss e encruamento isotrópico.

São apresentados diversos exemplos comparativos para verificar a validade dos procedimentos adotados.

CAPÍTULO 2

SOLUÇÃO NUMÉRICA DOS PROBLEMAS DA ELASTOPLASTICIDADE

2.1. Introdução.

Apresenta-se, neste capítulo, a formulação por elementos finitos para a solução de problemas envolvendo grandes deformações plásticas e não linearidade geométrica. O trabalho baseia-se nas formulações apresentadas por McMeeking & Rice [5].

O motivo dessa escolha foi fundamentada em dois fatos. O primeiro, deve-se aos bons resultados obtidos por Chandra [14] e Kikuchi & Cheng [21], quando utilizaram esta formulação na análise, respectivamente, dos processos de estampagem e extrusão. O segundo, porque a formulação permite aproveitar um determinado programa, existente, de elementos finitos da elastoplasticidade para pequenas deformações, deslocamentos e rotações. Para tal, necessitam-se pequenas adaptações que serão mostradas no decorrer do capítulo.

O método utiliza o princípio variacional, incremental, dos trabalhos virtuais apresentado por Hill [34]. Na seção 2.2 é visto que este princípio é convertido em termos dos tensores escolhidos para exprimir a relação constitutiva.

As equações de equilíbrio são obtidas através da descrição lagrangiana atualizada.

2.2. Equações de equilíbrio.

O deslocamento de um corpo sujeito a esforços externos pode ser representado por

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t),$$

onde t representa o tempo, e \mathbf{X} a posição de uma partícula \mathbf{X} em relação a um sistema de referência fixo e ortonormal.

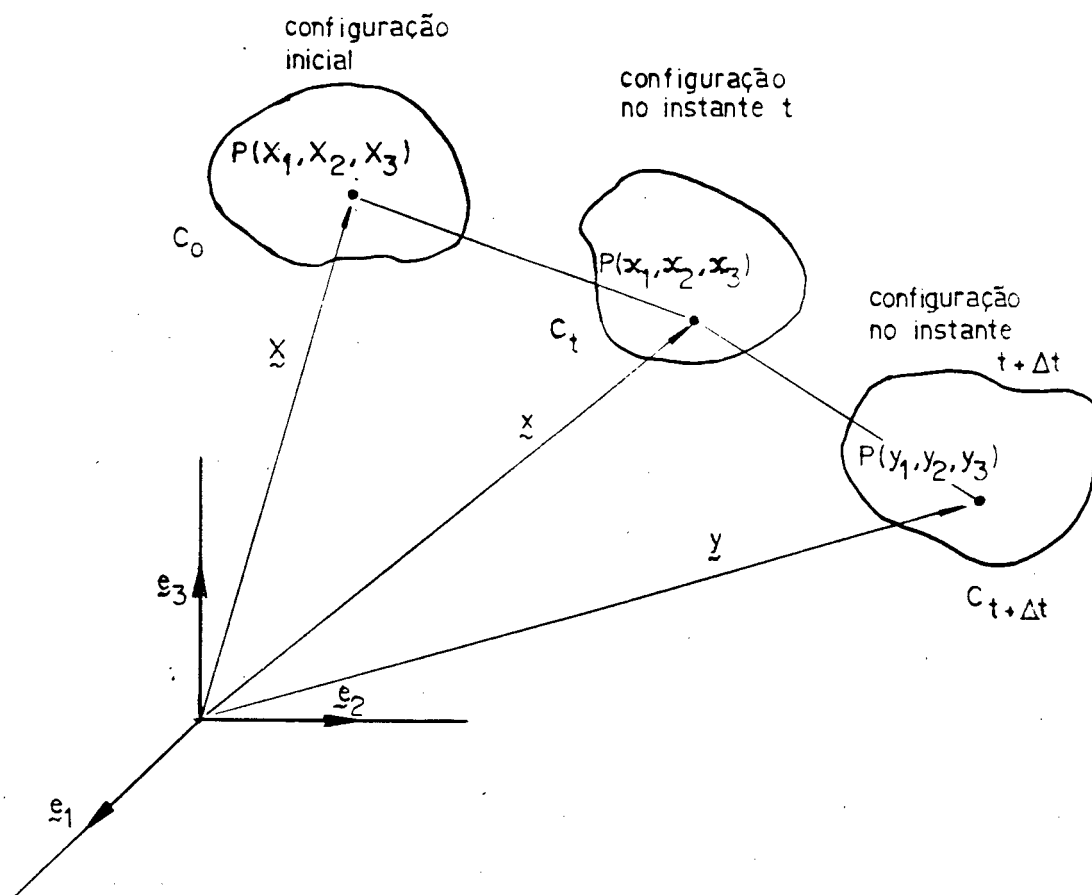


Figura 5 - Definição das configurações para a descrição lagrangiana atualizada.

A trajetória do carregamento é obtida acrescentando-se sucessivos incrementos de carga ao corpo sólido, os quais originam a sequência

$$C_0, C_1, C_2, \dots, C_t, C_{t+\Delta t}, \dots, C_r,$$

correspondente às configurações de equilíbrio, após cada acréscimo no carregamento.

Supondo-se que sejam conhecidas as soluções até o instante t , o problema consistirá em determinar todas as variáveis de estado em $t+\Delta t$, dado o valor do incremento de carga entre estes instantes. Chega-se à equação final de equilíbrio procedendo-se da mesma forma para os instantes seguintes.

As configurações de interesse serão C_0 , no instante inicial t_0 , C_t no instante t e $C_{t+\Delta t}$ em $t+\Delta t$, as quais podem ser observadas na Figura 5 acima.

Devido à natureza referencial da descrição lagrangiana o vetor posição \mathbf{X} de cada ponto do sólido fica constante durante o intervalo de tempo $[t, t+\Delta t]$.

No fim de cada intervalo a configuração geométrica, bem como as tensões, são atualizadas.

O princípio variacional incremental, apresentado por Hill [34], que originalmente é referido à configuração inicial C_0 tem a seguinte forma:

$$\int_{V^0} \dot{t}_{ij} \delta \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dV^0 = \int_{V^0} \dot{b}_i \delta v_i dV^0 + \int_{S^0} \dot{f}_i \delta v_i dS^0, \quad (2.1)$$

em que

$(\dot{})$ representa a derivada da variável em relação ao tempo;
 V^0 e S^0 são, respectivamente, o volume e a superfície de contorno iniciais;

\mathbf{t} é o tensor tensão nominal, não simétrico, ou 1^o tensor de

Piola-Kirchhoff, definido de tal maneira que uma força f por unidade de área da configuração de referência com o vetor normal n^0 se expressa por $f_i = n_i^0 t_{ij}$;

b é a força de corpo por unidade de volume inicial;

δv representa uma variação virtual arbitrária da velocidade com valor nulo, onde v está especificado, ou seja, em $S^0 - S_T^0$;

S_T^0 denomina a superfície de referência onde os vetores tração são especificados.

O próximo passo será definir o tensor taxa de variação de tensão adequado para descrever as propriedades do material, quando sujeito a grandes deslocamentos, sendo desejável que o mesmo seja independente das rotações e deslocamentos de corpo rígido. Como o tensor \dot{t} não preenche esta condição [34], McMeeking & Rice [5], sugerem o tensor incremento co-rotacional do tensor tensão de Kirchhoff τ^* (ou tensor de Jaumann) para a descrição da relação constitutiva. Aqui deve-se ressaltar que o tensor de Jaumann, segundo Simo & Pister [67] e Moss [68], não produz bons resultados em deformações de cisalhamento simples.

A relação entre ambos os tensores é [5]

$$\dot{t}_{ij} = \tau_{ij}^* - \tau_{kj} D_{ki} - \tau_{ik} D_{kj} + \tau_{ik} v_{j,k}, \quad (2.2)$$

em que

τ = tensor de Kirchhoff,

$$v_{j,k} = \frac{\partial v_j}{\partial x_k},$$

D = tensor taxa de deformação com,

$$D_{ij} = \frac{1}{2} [v_{i,j} + v_{j,i}] \quad (2.3)$$

A relação entre o tensor de Kirchhoff e de Cauchy é dada por:

$$\tau_{ij} = J \sigma_{ij} \quad (2.4)$$

onde J é a razão entre os volumes do corpo no estado de referência (isto é no instante t) e no instante intermediário pertencente ao intervalo $[t, t+\Delta t]$.

Verifica-se que no instante inicial t,

$$\tau = \sigma,$$

pois J tem valor unitário no início do incremento. Assim a equação 2.2 transforma-se em:

$$\dot{t}_{ij} = \tau_{ij}^* - \sigma_{kj} D_{ki} - \sigma_{ik} D_{kj} + \sigma_{ik} v_{j,k} \quad (2.5)$$

Substituindo-se a expressão 2.5 na equação 2.1, tem-se, para a configuração no instante t (vide Apêndice 1):

$$\begin{aligned} \int_V \left[\tau_{ij}^* \delta D_{ij} - \frac{1}{2} \delta (2 D_{ik} D_{kj} - v_{k,i} v_{k,j}) \right] dV &= \\ &= \int_S \dot{f}_i \delta v_i dS + \int_V \dot{b}_i \delta v_i dV, \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde:

V = volume no instante t,

\dot{f} , \dot{b} = taxa de variação das intensidades de força, respectivamente por unidade de área e de volume da configuração em t.

A transformação da equação 2.1 para 2.6 foi efetuada visando o uso direto da relação constitutiva em termos da taxa de

variação de tensão. A outra forma possível, é tratada por Hibbitt, Marcal e Rice [4] ou Gadala [7], seria a conversão daquela relação constitutiva (2.10) em termos das medidas de tensão e de deformação que aparecem na formulação variacional da equação 2.1.

2.3. Formulação por elementos finitos

A partir do princípio variacional exposto na equação 2.6, obtém-se a expressão matricial dos elementos finitos.

Inicialmente definem-se as equações de interpolação das velocidades

$$\{v\} = [N] \{\psi\}, \quad (2.7)$$

na qual

$\{v\}$ = vetor da velocidade,

$\{\psi\}$ = taxa de variação dos graus de liberdade nodais,

$[N]$ = matriz das funções interpolação;

e

$$\{D\} = [B] \{\psi\}, \quad (2.8)$$

sendo $\{D\}$ o vetor que representa o tensor taxa de deformação.

As matrizes $[B]$ e $[N]$ têm a relação

$$[B_{ij}] = \frac{1}{2} [N_i]_{,j} + \frac{1}{2} [N_j]_{,i}, \quad (2.9)$$

sendo $[N_i]$ e $[B_{ij}]$ as linhas das matrizes N e B :

$$v_i = [N_i] \{\psi\}, \quad (2.9.a)$$

$$D_{ij} = [B_{ij}] \{\psi\} \quad (2.9.b.)$$

As equações 2.7 e 2.8 seguem diretamente da extensão das equações matriciais existentes para as formulações de pequenas deformações. A matriz $[N]$ expressa $\{v\}$ em termos da taxa de variação dos graus de liberdade nodais, e $[B]$, a matriz da relação entre $\{v\}$ e $\{\dot{\epsilon}\}$ (taxa de variação das deformações).

As matrizes N e B do elemento de casca escolhido para o presente trabalho estão apresentadas, em detalhes, no Capítulo 4.

Tendo em consideração as equações 2.7 e 2.8, e a relação constitutiva expressa por $([3],[5])$

$$\{\tau^*\} = [C] \{D\}, \quad (2.10)$$

a parcela $\int \tau^* \delta D dV$ do primeiro membro da equação 2.6 será dada por

$$\{\dot{\delta\psi}\}^T [K_L] \{\dot{\psi}\} = \left[\int_V [B]^T [C] [B] dV \right] \{\dot{\psi}\}, \quad (2.11)$$

em que

$$[K_L] = \int_V [B]^T [C] [B] dV \quad (2.12)$$

é a matriz rigidez das pequenas deformações e deslocamentos.

Os demais componentes de 2.6 são dados por

$$\{\dot{\delta\psi}\}^T [K_0] \{\dot{\psi}\} = \int_V [\delta v_{k,i} \sigma_{ij} v_{k,j} - 2 \delta D_{ki} \sigma_{ij} D_{kj}] dV \quad (2.13)$$

onde $[K_0]$ é a matriz rigidez da tensão inicial.

A utilização das equações 2.7 e 2.8 na expressão acima resulta em:

$$[K_S] = \int_V \left([N_k]^T \sigma_{ij} [N_k]_{,j} - 2[B_{ki}]^T \sigma_{ij} [B_{kj}] \right) dV \quad (2.14)$$

Os termos correspondentes ao trabalho incremental externo (segundo membro da equação 2.6.) são expressos por:

$$\{\dot{R}\} = \int_V [N]^T \{\dot{b}\} dV + \int_{S_T} [N]^T \{\dot{f}\} dS \quad (2.16)$$

2.4. Atualização das tensões.

No procedimento incremental, objetiva-se obter os valores das tensões no instante $t+\Delta t$ conhecendo-se de antemão os tensores tensão de Cauchy no instante t .

O valor dos componentes da taxa de incremento de tensão (τ^*) é conseguido valendo-se da relação constitutiva representada pela equação 2.10:

$$\tau_{ij}^* = C_{ijkl} D_{kl}$$

Os componentes de τ^* são relacionados com os incrementos de tensão de Cauchy, referidos ao sistema fixo de coordenadas cartesianas, da seguinte forma:

$$\tau_{ij}^* = \dot{\sigma}_{ij} - W_{ik} \sigma_{kj} + \sigma_{ik} W_{kj} + \sigma_{ij} D_{kk} \quad (2.16)$$

com $W_{ij} = \frac{1}{2} [v_{i,j} - v_{j,i}]$,

conforme mostra Kikuchi [21].

A partir da equação 2.17 determina-se $\dot{\sigma}_{ij}$ que é o tensor

taxa de variação do tensor de Cauchy. A atualização do tensor de Cauchy é feita da forma [54]:

$$\sigma^{(t+\Delta t)} = \sigma^{(t)} + \Delta\sigma \quad (2.17)$$

em que $\Delta\sigma = \dot{\sigma} \cdot \Delta t$.

2.5. Integração da matriz rigidez.

A integração da matriz rigidez é feita por meio de dois métodos diferentes.

Para as direcções ξ , η , ou seja na superfície média da casca, emprega-se a técnica de integração da quadratura de Gauss com 2 x 2 pontos [19].

Já na direcção normal, divide-se a casca em camadas paralelas [19],[20],[32],[33]; com o Jacobiano admitido como constante ao longo da espessura.

A motivação para o tratamento diferenciado vem da necessidade de modelar adequadamente a complexa distribuição das tensões, causadas pela deformação plástica ao longo da espessura. Em corpos sujeitos à flexão, os pontos de integração de Gauss ficariam relativamente distantes das fibras mais externas, nas quais se iniciam as deformações plásticas, e levariam a uma imprecisão muito grande na integração.

Para os procedimentos de integração, a casca é dividida em um número par de camadas iguais, conforme mostra a Figura 6. As propriedades físicas no interior de cada uma delas são supostas constantes e determinadas pelos seus pontos médios.

O Apêndice 4 detalha a implementação da matriz rigidez.

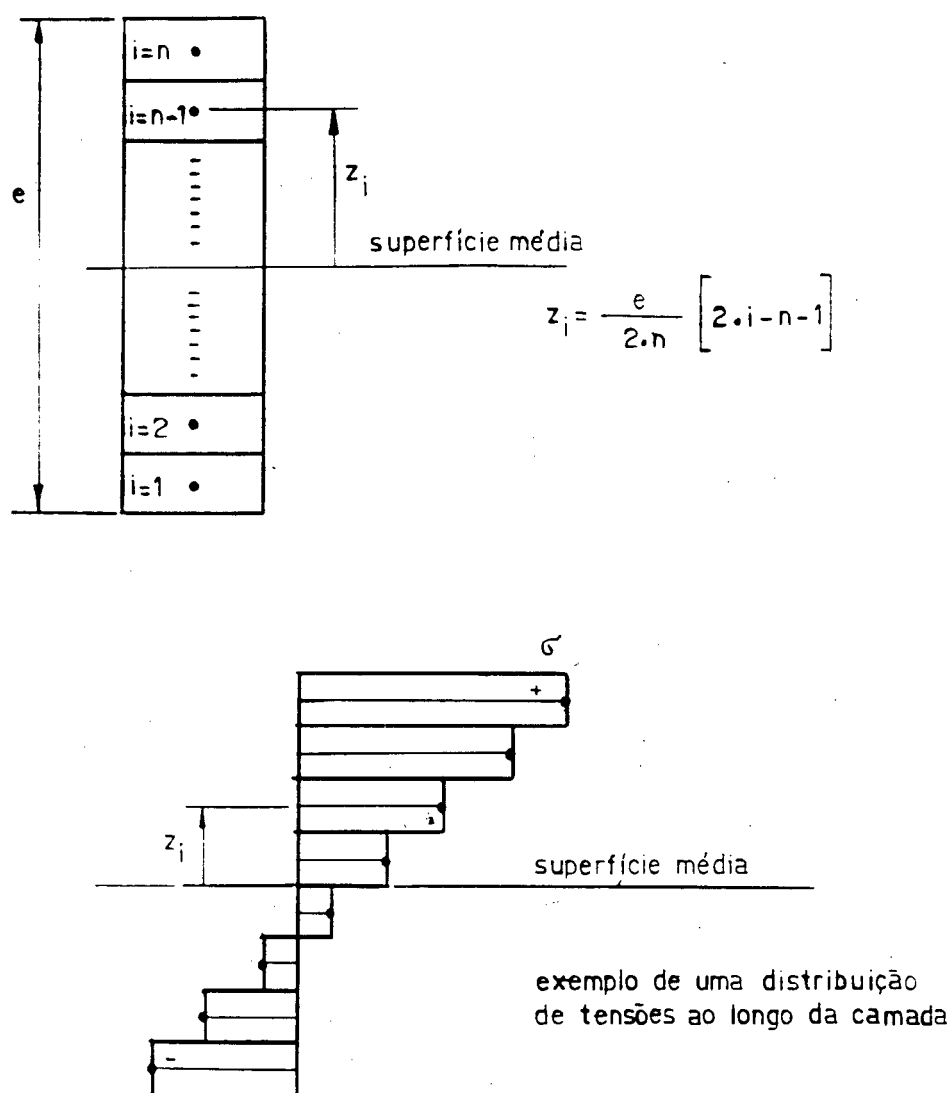


Figura 6 - Divisão da casca em camadas.

2.6. Solução numérica do sistema não linear.

A equação matricial que se forma a partir da expressão 2.6 deve ser resolvida por um método iterativo para se obter uma solução aproximada e dentro de uma faixa de tolerância

pré-estabelecida. No presente trabalho, foram implementados os métodos de Newton-Raphson modificado e BFGS.

2.6.1. Método de Newton-Raphson.

No método de Newton-Raphson, as equações de equilíbrio

$$f(\mathbf{u}^2) = 0, \quad (2.18)$$

ou seja,

$$f(\mathbf{u}^2) = \mathbf{R}(\mathbf{u}^2) - \mathbf{F}(\mathbf{u}^2), \quad (2.19)$$

onde

$\mathbf{R}(\mathbf{u}^2)$ = vetor das forças nodais externas, no final do incremento;

\mathbf{F} = vetor nas forças nodais internas;

\mathbf{u}^2 = vetor dos deslocamentos nodais para a configuração de equilíbrio no final do incremento;

são expandidos em séries de Taylor, obtendo-se [35]

$$\mathbf{K}^{i-1} \Delta \mathbf{u}^i = \mathbf{R}^2 - \mathbf{F}^{i-1}, \quad (2.20)$$

onde

$$\Delta \mathbf{u}^i = \mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1}, \quad (2.21)$$

\mathbf{K}^{i-1} = matriz rigidez;

os índices i e $i-1$ denotam o número da iteração, os índices 1 e 2 indicam, respectivamente, as configurações no início e no fim do incremento.

As condições iniciais da equação acima são dadas por

$$F^0 = {}^1F, \quad (2.22)$$

$$u^0 = {}^1u, \quad (2.23)$$

$$K^0 = K({}^1u). \quad (2.24)$$

A aplicação da expressão 2.20 está, graficamente, ilustrada pela Figura 7.

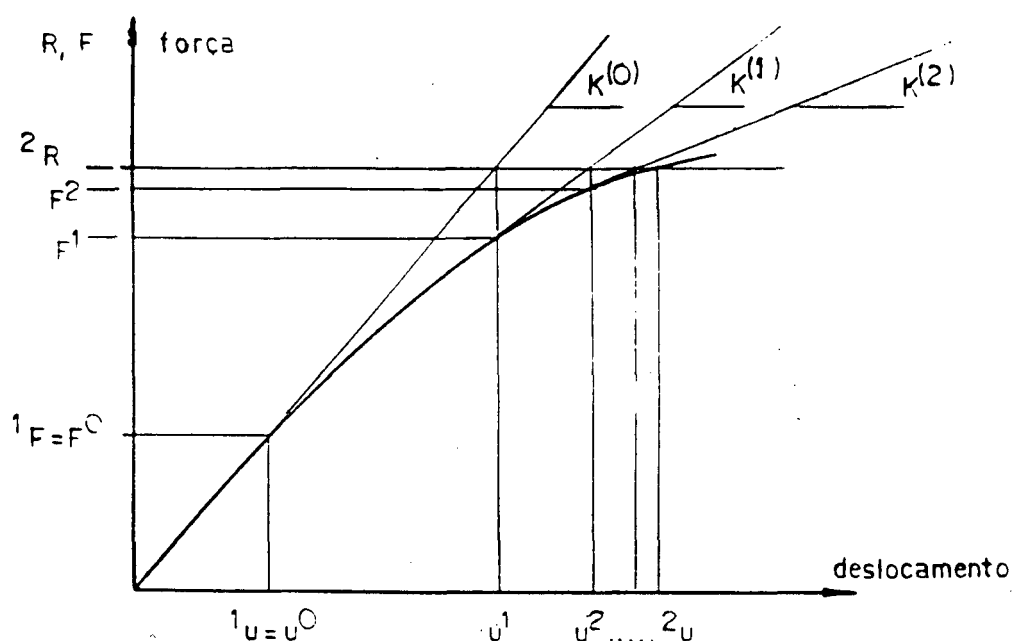


Figura 7 - Método iterativo de Newton-Raphson.

2.6.2. Método de Newton-Raphson modificado.

O método de Newton-Raphson modificado diferencia-se do anterior pelo fato da matriz rigidez ser atualizada apenas no início de cada incremento. Neste caso, a expressão 2.20 deverá ser alterada para

$$K^0 \Delta u^i = {}^2R - F^{i-1} \quad (2.25)$$

A Figura 8 mostra a representação gráfica deste método.

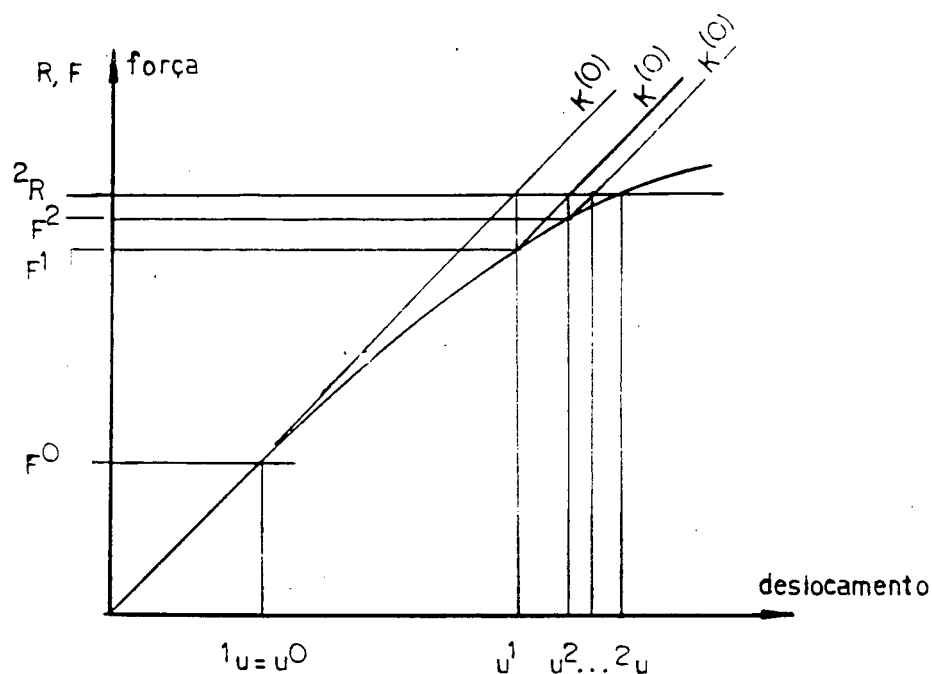


Figura 8 - Método de Newton-Raphson modificado.

2.6.3 Método BFGS.

O método BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) é semelhante ao Newton-Raphson e por isso considerado, por Bathe [35], como um método quasi-Newtoniano. A principal diferença entre ambos consiste na forma de atualização da matriz rigidez, como pode ser verificada pela equação 2.28 abaixo.

Os procedimentos iterativos do método BFGS foi implementado segundo o algoritmo apresentado por Matthies & Strang

[10] que tem os seguintes passos:

A) São dados os valores iniciais para a iteração i :

${}^2u^{i-1}$ = vetor dos deslocamentos nodais,

${}^2K^{i-1}$ = matriz rigidez,

${}^2F^{i-1}$ = vetor das forças nodais internas,

2R = vetor das forças nodais externas;

com o índice 2 denotando o valor de uma variável no final do incremento.

Calcula-se, neste passo, a direção de procura

$$d = \left[{}^2K^{-1} \right]^{i-1} \left[{}^2R - {}^2F^{i-1} \right], \quad (2.26)$$

sendo $\left[{}^2K^{-1} \right]^0$ o inverso da matriz rigidez no início do incremento.

B) Determina-se, aqui, o vetor dos deslocamentos nodais

$$u^i = u^{i-1} + s \cdot d \quad (2.27)$$

O parâmetro s é calculado iterativamente segundo o método conhecido como "line search" [10] e será explicado a seguir.

C) Calcula-se, por último, a matriz rigidez (${}^2K^i$) para a próxima iteração; para isso, a matriz deve ser atualizada de forma que

$${}^2K^i \delta^i = \gamma^i, \quad (2.28)$$

com

$$\delta^i = u^i - u^{i-1}, \quad (2.29)$$

$$\gamma^i = F^i - F^{i-1}, \quad (2.30)$$

e retorna-se ao passo inicial para uma nova iteração.

A interpretação geométrica da equação 2.28 corresponde a uma aproximação da solução por secante. A Figura 9 ilustra a aplicação em problemas com um grau de liberdade, adotando-se o valor unitário para o parâmetro s .

O método "line search" tem como finalidade acelerar o processo iterativo. Consiste em procurar, ao longo da linha $u^i = u^{i-1} + s.d$, variando-se o parâmetro s , por uma solução tal que

$$d^T \cdot ({}^2R - F^i) \cong 0 \quad (2.31)$$

Isto equivale a satisfazer à desigualdade

$$d^T \cdot ({}^2R - {}^2F^i) \leq \text{stol} \cdot d^T \cdot ({}^2R - {}^2F^{i-1}), \quad (2.32)$$

para uma tolerância (stol) pré-estabelecida.

A atualização da matriz rigidez é efetuada da seguinte maneira:

$$\left[{}^2K^{-1} \right]^i = \left[I + w \cdot v^T \right] \left[{}^2K^{-1} \right]^{i-1} \left[I + v \cdot w^T \right], \quad (2.33)$$

em que

$$v^i = - \left[\frac{\delta^{iT} \gamma^i}{\delta^{iT} {}^2K^{i-1} \delta^i} \right]^{1/2} {}^2K^{i-1} \delta^i - \gamma^i \quad (2.34)$$

$$w^i = \frac{\delta^i}{\delta^{iT} \gamma^i} \quad (2.35)$$

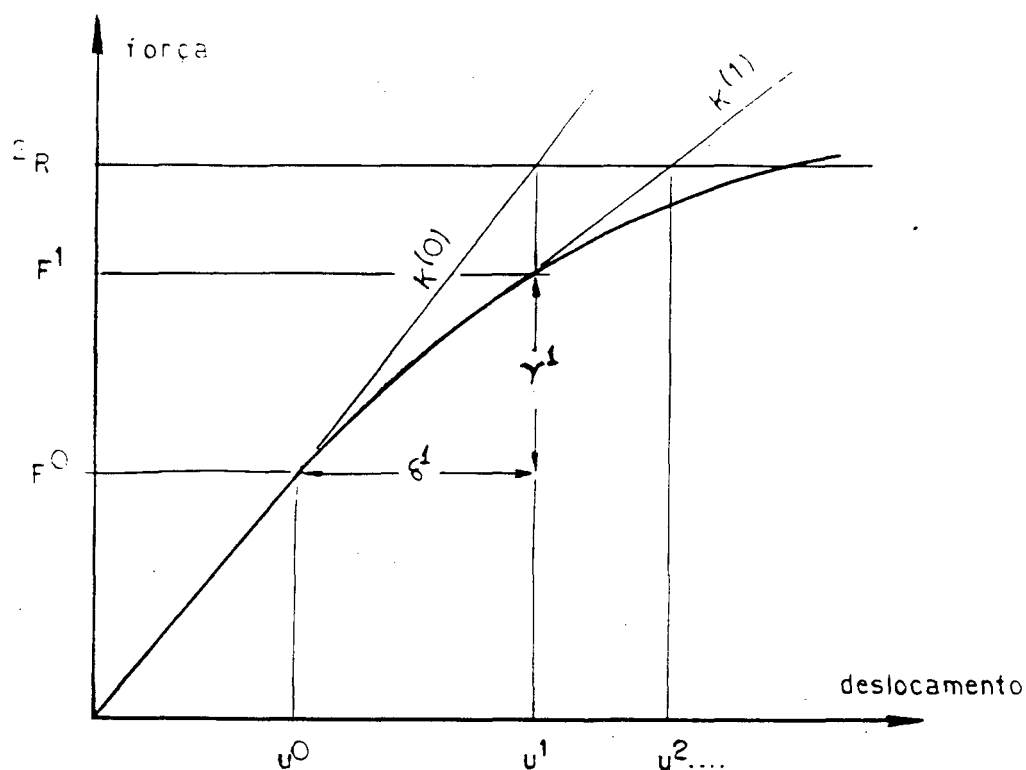


Figura 9 - Método BFGS.

Para se evitar cálculos com matrizes mal condicionadas, a matriz atualizada só é utilizada na iteração seguinte quando o número de condicionamento c da matriz ${}^2K^i$, dado por

$$c = \left[\frac{\delta^{iT} \gamma^i}{\delta^{iT} {}^2K^{i-1} \delta^i} \right]^{1/2} \quad (2.36)$$

seja menor que um determinado valor (10^5 por exemplo).

A convergência da solução depende do valor da tolerância STOL, que deve ser suficientemente baixa, e da possibilidade de utilizar a matriz rigidez atualizada em todas as iterações [10]. Mas isto nem sempre é possível, visto que o valor da tolerância STOL não pode ser muito baixa, sob pena de exigir um número proibitivo de iterações; além disso, como foi visto acima, a utilização da matriz rigidez atualizada depende do número de condicionamento da mesma.

2.6.4. Comentários sobre os métodos iterativos.

A presença da deformação plástica requer algumas considerações sobre os métodos de resolução, conforme mostra Bathe [35].

O método de Newton-Raphson, por exemplo, será problemático em materiais perfeitamente plásticos, pois a matriz rigidez poderá tornar-se ou singular ou mal condicionada.

O método de Newton-Raphson modificado, onde se atualiza a matriz rigidez apenas no início de cada incremento, poderá suplantar o problema anterior. No entanto, a velocidade de convergência poderá ser muito lenta.

O problema, comum aos métodos Newton-Raphson modificado e BFGS, caracterizado pelas respostas tendendo a divergir, surge quando ocorre um aumento súbito da matriz rigidez que é mostrada pela trajetória B-C da Figura 10 [35]. Fisicamente, a passagem do ponto B para o ponto C, corresponde à mudança do estado plástico para o elástico.

Segundo Chen [56], o método BFGS não apresenta as

dificuldades relatadas acima, embora Matthies & Strang [10] mostrem que existem limitações que podem levar a soluções não convergentes. Estas limitações são comentadas no final do item 2.6.3.

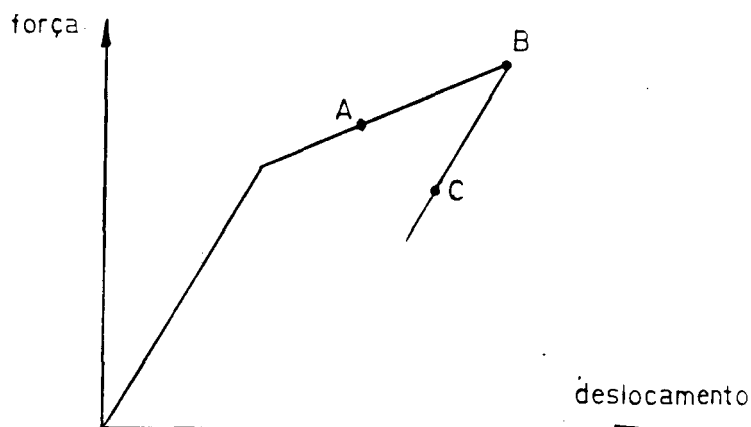


Figura 10 - Gráfico de um ensaio de tração simples para exemplificar um caso que pode apresentar problemas de convergência.

2.7. Critério de convergência.

A convergência da solução, para um dado incremento, é controlado pelas expressões [36]

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^N (\psi_i^r)^2}{\sum_{i=1}^N (R_i)^2} \right]^{1/2} \leq \text{Tolerância}, \quad (2.37)$$

utilizada para controlar as forças nodais, e

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^N (\nabla Q_i^r)^2}{\sum_{i=1}^N (Q_i^r)^2} \right]^{1/2} \leq \text{Tolerância}, \quad (2.38)$$

utilizada para controlar os deslocamentos nodais. Nestas expressões

ψ_i^r = força residual no nó i , representa a diferença entre a força externa e a força aplicada pelo elemento ao nó (força interna),

R_i = força externa que está sendo aplicada no incremento,

∇Q_i^r = incremento de deslocamentos da iteração r ,

Q_i^r = incremento acumulado de deslocamentos até a iteração r .

CAPÍTULO 3

RELAÇÃO CONSTITUTIVA

3.1. Introdução.

Neste capítulo, apresenta-se uma relação constitutiva para materiais que atuam no regime elastoplástico, acompanhado de não linearidade geométrica.

Tem-se, na parte inicial do capítulo, a escolha da relação constitutiva infinitesimal, particularizada para o estado plano de tensões. São, também, efetuadas hipóteses sobre as características de plastificação do material.

A seguir, é feita uma generalização da relação constitutiva infinitesimal, conforme a proposição de Hutchinson [3] e McMeeking & Rice [6]. A finalidade é de adequá-la aos casos com não linearidade geométrica.

Finaliza-se o capítulo com um método de integração da relação constitutiva, proposto por Hinton e Owen [57].

3.2. Relação constitutiva infinitesimal.

A relação constitutiva escolhida, conforme mencionado no Capítulo 2, é uma extensão dos casos da plasticidade infinitesimal, em que os deslocamentos, as deformações e as rotações devem ser pequenos.

O modelo, aqui adotado para o caso infinitesimal, segue a teoria clássica da plasticidade, que é apresentada por inúmeros autores como Cook [61], Bathe [55], Chen [56] e Malvern [59].

As hipóteses admitidas são:

- a) relação constitutiva independente da velocidade de deformação,
- b) critério de escoamento de von Mises,
- c) lei de escoamento de Prandtl-Reuss,
- d) exclusão do efeito Bauschinger,
- e) encruamento isotrópico.

Essas hipóteses são geralmente utilizadas no modelamento de materiais metálicos. Sheppard e Roberts [51], por exemplo, as aplicam na análise de flexão alternada de chapas metálicas.

3.2.1. Critério de escoamento de von Mises.

É a hipótese comumente aceita para determinar o início de escoamento de metais [57]. Nesta admite-se a passagem para fase plástica quando uma combinação de tensões, expressa pelo segundo invariante do tensor desviador, atingir um determinado valor K :

$$f(\sigma_{ij}) = \sqrt{3} \sqrt{J_2} - \sqrt{3} K (k) = 0 \quad (3.1)$$

onde

f = função escoamento,

$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}$ = segundo invariante do tensor deviatórico de tensões de Cauchy,

$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{mm} \delta_{ij}$ = tensor deviatórico, (3.2)

K = parâmetro do material, que expressa o valor a partir do qual este passa para a fase plástica,

k = parâmetro de encruamento.

O valor de K é associado ao da tensão de escoamento ($\bar{\sigma}$), pela expressão

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3} K \quad (3.3)$$

onde o valor de $\bar{\sigma}$ é obtido experimentalmente através de ensaio de tração simples e corresponde ao limite de escoamento.

3.2.2. Equações de Prandtl-Reuss.

O comportamento durante o escoamento plástico é definido por

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.4)$$

O gradiente de f define a direcção do incremento da deformação plástica e $d\lambda$ a sua intensidade.

Durante o processo de deformação plástica, a condição mostrada pela equação 3.1 deve ser obedecida.

Admite-se que o material apresente encruamento isotrópico, isto é, que a superfície de escoamento definida por $f = 0$ mantém seu formato, e que sua expansão depende do grau da deformação plástica, definido pelo parâmetro de encruamento k .

3.2.3. Relação constitutiva elastoplástica.

A determinação da relação constitutiva elastoplástica advém da hipótese adicional de que a deformação total infinitesimal pode ser representada pela soma da parte elástica com a plástica:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^{(p)} + d\varepsilon^{(e)}, \quad (3.5)$$

ou seja;

$$d\varepsilon = C^{(e)-1} d\sigma + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad (3.6)$$

em que

$$d\epsilon^{(e)} = C^{(e)-1} d\sigma, \quad (3.6.a)$$

ou ainda:

$$d\sigma = C^{(e)} d\epsilon^{(e)}, \quad (3.6.b)$$

com o tensor $C^{(e)}$ representando a relação constitutiva na fase elástica.

Fazendo-se a pré-multiplicação de (3.6.) por $C^{(e)}$ chega-se à equação:

$$d\sigma = C^{(e)} d\epsilon^{(e)} - C^{(e)} d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (3.7)$$

TOTAL \nearrow

A função escalar $d\lambda$ é determinada pela condição de consistência, definida por $df = 0$. Aplicando-se esta condição na equação 3.1 tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial k} dk = 0, \quad (3.8)$$

ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} - A d\lambda = 0, \quad (3.9)$$

com

$$A = - \frac{1}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial k} dk. \quad (3.10)$$

O valor de A pode ser obtido a partir do ensaio de tração de simples [57], [58]:

$$A = \frac{d\sigma}{d\epsilon^p} \quad (3.11)$$

No presente trabalho modelou-se a curva tensão-deformação na forma simplificada, conforme mostra a Figura 11. O parâme-

tro A para a curva da Figura 11 será determinado como segue:

$$A = \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E}} \quad (3.12)$$

Com as equações 3.6, 3.7, 3.8, 3.9 e 3.12 chega-se à relação constitutiva elastoplástica ($C^{(ep)}$):

$$d\sigma = C^{(ep)} d\varepsilon \quad (3.13)$$

com:

$$C^{(ep)} = C^{(e)} - \frac{C^{(e)} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T C^{(e)}}{A + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T C^{(e)} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}} \quad (3.14)$$

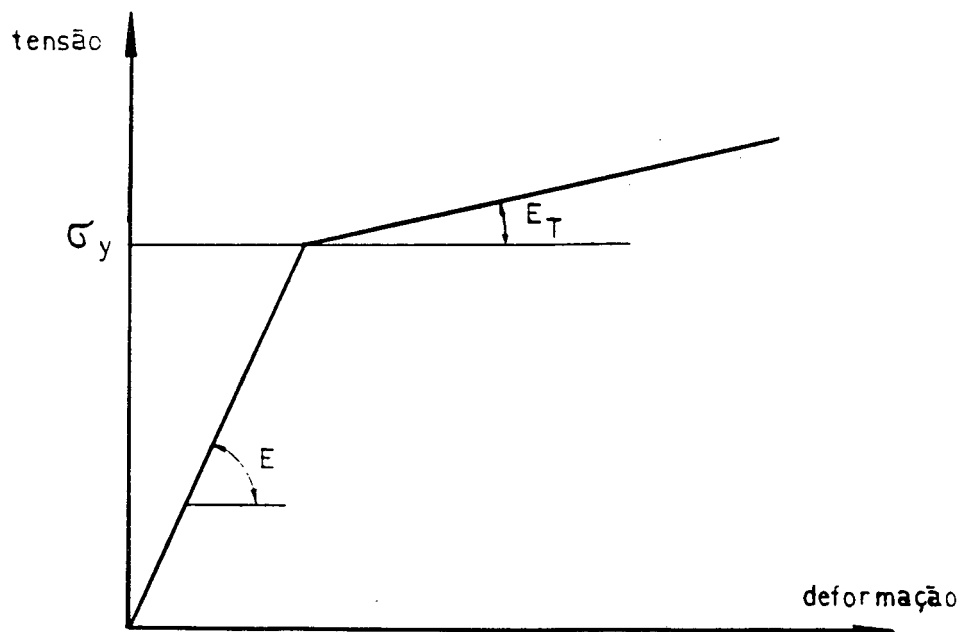


Figura 11 - Curva tensão deformação (ensaio de tração simples).

3.2.4. Critério de carregamento plástico [56].

O material estando no regime plástico pode, com o próximo incremento de carga, prosseguir escoando plasticamente ou passar para o descarregamento elástico.

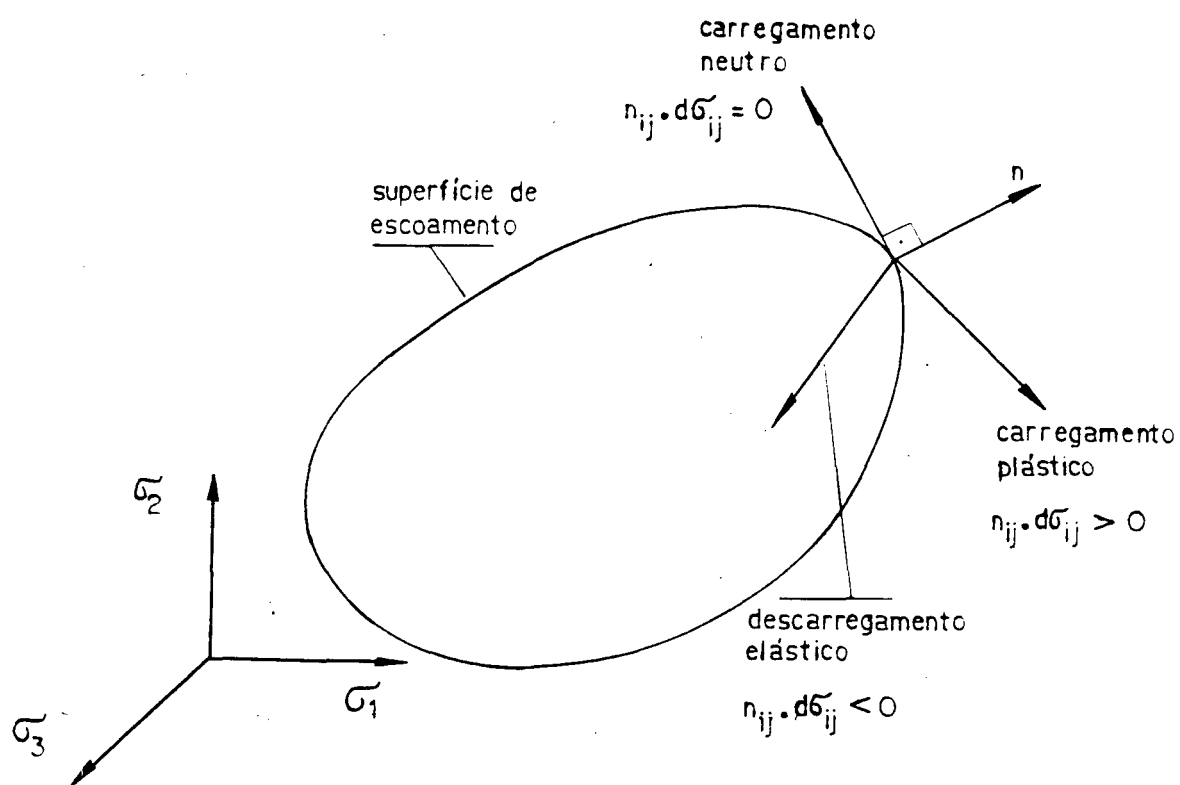


Figura 12 - Critério de carregamento plástico.

O escoamento plástico só ocorre (valendo a relação 3.14) quando:

- 1) a tensão, no ponto em questão, estiver na superfície de escoamento; ou seja, quando estiver na condição estabelecida pela equação 3.1,
- 2) o incremento de tensão estiver apontando para o lado externo da superfície de escoamento:

$$n_{ij} \cdot d\sigma_{ij} > 0, \quad (3.15)$$

$$\text{com } n_{ij} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}{\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \right]^{1/2}} \quad (3.16)$$

A Figura 12 acima mostra a interpretação geométrica do critério de carregamento plástico. O vetor n , dado pela equação 3.16, é normal à superfície de escoamento $f = 0$.

A condição (3.15) pode ser implementada numericamente da seguinte forma [56]:

$$L = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [C^{(e)}] \{\Delta \varepsilon\} > 0 \quad (3.17)$$

Nas demais condições, a resposta do material é elástica, prevalecendo a relação estabelecida pelo tensor $C^{(e)}$ da equação 3.6.b.

3.2.5. Relação constitutiva para o estado plano de tensões.

As equações 3.13 e 3.14 são particularizadas para o estado plano de tensões; adicionalmente são desprezados os cisalhamentos transversais, pois constitui uma hipótese admissível para cascas finas:

$$d\sigma_{33} \cong 0, \quad (3.18)$$

$$d\varepsilon_{12} \cong 0, \quad d\varepsilon_{22} \cong 0 \quad (3.18.a)$$

Designa-se o tensor C , daqui em diante, como sendo a relação constitutiva tanto da fase elástica ou da elastoplástica. Então a hipótese levantada em (3.18) e aplicada em (3.13) ou (3.14) se traduz por:

$$\begin{Bmatrix} d\sigma \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_l \\ d\varepsilon_{33} \end{Bmatrix}, \quad (3.19)$$

com

$$d\sigma = \begin{Bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{12} \end{Bmatrix}, \quad d\varepsilon_l = \begin{Bmatrix} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ d\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}, \quad (3.20)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix},$$

e C_{11} , C_{12} , C_{21} , C_{22} são, respectivamente, as matrizes de dimensões 3×3 , 3×1 , 1×3 , 1×1 , obtidas a partir de C_e ou C_{ep} .

A condensação da equação 3.19 resultará em, [30]

$$d\sigma_l = C d\varepsilon_l, \quad (3.21)$$

$$\text{com: } C = C_{11} - C_{12} C_{22}^{-1} C_{21}, \quad (3.22)$$

$$\text{e: } d\varepsilon_{33} = -C_{22}^{-1} C_{21} d\varepsilon_l. \quad (3.23)$$

3.2.6. Generalização da relação constitutiva

A extensão do uso da relação constitutiva, dada pelas equações 3.13 e 3.14, para os casos com deformação finita fundamenta-se na escolha adequada do tensor incremento de deformação e do tensor incremento de tensão, em substituição aos utilizados no caso infinitesimal.

Antes de se proceder às considerações sobre a escolha destes tensores convém observar a hipótese da decomposição linear utilizada na equação 3.5. Segundo Gadala [7], a sua validade para os casos geometricamente não lineares, fica delimitada para os casos onde ocorram:

- a) deformações quase estáticas e,
- b) a componente elástica da deformação seja pequena.

Isto pode ser observado na deformação da maioria dos metais como, por exemplo, o aço-carbono que é o material de interesse do presente trabalho.

A generalização, aqui escolhida, é feita com o par dual tensor de Jaumann (τ^*) e tensor taxa de deformação (D), que já foram citados no Capítulo 2.

Estes tensores têm a propriedade de ser independentes das rotações de corpo rígido, e a matriz rigidez que resulta dessa escolha é simétrica.

A relação constitutiva fica, então, definida por:

$$\tau_{ij}^* = C_{ijkl}^{(ep)} D_{kl}, \quad (3.24)$$

quando ocorrer carregamento plástico e:

$$\tau_{ij}^* = C_{ijkl}^{(e)} D_{kl}, \quad (3.25)$$

quando houver carregamento ou descarregamento elástico.

3.3. Integração da relação constitutiva.

A verificação das equações de equilíbrio que aparecem nos processos de resolução numérica requer o conhecimento do tensor de Cauchy no final do incremento.

O procedimento é relativamente simples quando o material está em carregamento ou descarregamento elástico; para isto utiliza-se a equação 3.25 na sua forma incremental:

$$\Delta \tau_{ij}^* = C_{ijkl}^{(e)} \Delta D_{kl} \quad (3.26)$$

com $\Delta \tau_{ij}^*$ pode-se atualizar o tensor de Cauchy conforme foi visto no Capítulo 2.

No regime plástico, no entanto, exige-se a integração da relação constitutiva para ter-se em conta a história do carregamento [35]

$$\Delta \tau^* = \int_{t_{\{D\}}}^{t_{\{D\}} + (\Delta D)} [C^{(ep)}] \{dD\} \quad (3.27)$$

Durante a integração, deve-se obedecer a condição de escoamento da equação 3.1.

Existem diversas maneiras para fazer a integração de (3.27); alguns exemplos são os trabalhos de Ortiz e Simo [16] e de Chen [56].

Aqui, escolheu-se o método apresentado por Hinton e Owen [57].

O procedimento está fundamentado na equação 3.7 na sua

forma generalizada; isto é, usando-se $\Delta\tau^*$ e D .

Como pode ser visto na Figura 13, a forma mais simples de integração, seria a aplicação direta do valor total D . O problema deste processo é que o tensor de Cauchy no final do incremento ficaria muito afastado da superfície de escoamento, desobedecendo a condição de escoamento imposta por (3.1).

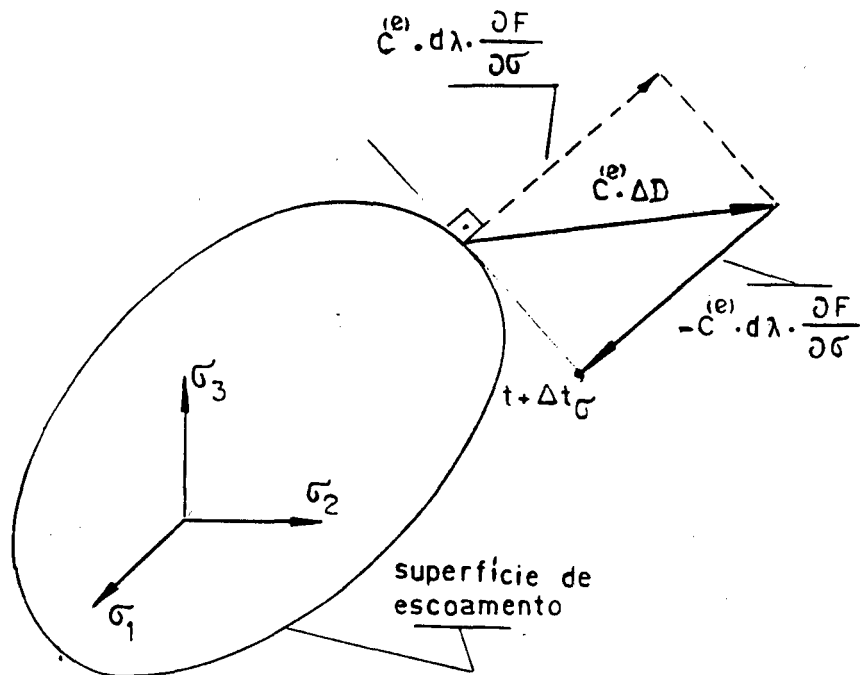


Figura 13 - Integração da relação constitutiva usando-se um subincremento.

Uma melhor aproximação é conseguida dividindo-se a deformação ΔD em m subincrementos iguais. Este procedimento é

ilustrado pela Figura 14.

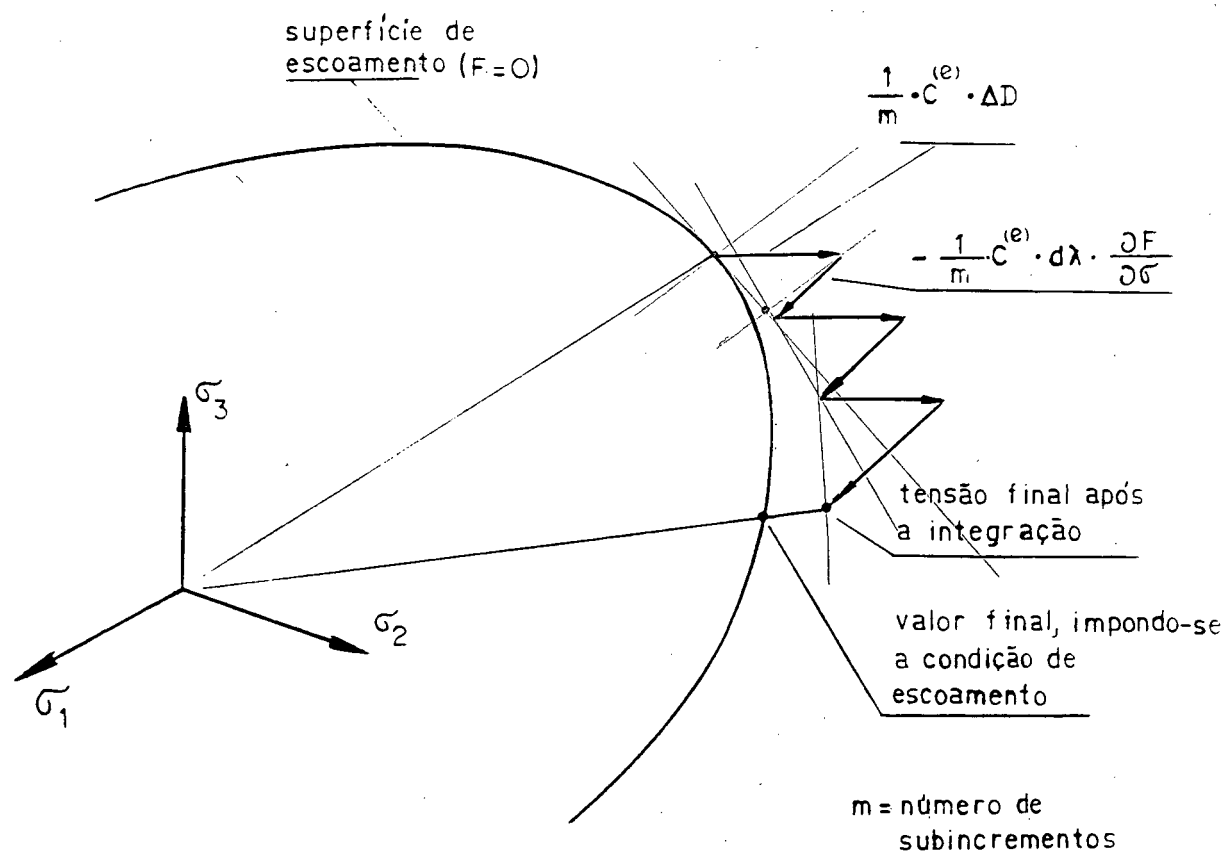


Figura 14 - Método de integração em subincrementos.

O número de subincrementos m para o processo depende do valor total de tensão efetiva $\bar{\sigma}$ [57]:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{a}{2} \sigma_{ij} \cdot \sigma_{ij}} \quad (3.28)$$

A expressão para o seu cálculo é assim sugerido por Hinton e Owen [57]:

$$m = 8 \cdot \left[\frac{\bar{\sigma} - \sigma_y}{\sigma_y^0} \right] + 1, \quad (3.29)$$

onde σ_y^0 é o valor da tensão de escoamento inicial,

σ_y é o valor da tensão de escoamento no início do incremento.

O valor final do tensor de Cauchy (σ) ainda estará ligeiramente deslocado da superfície de escoamento, dada por $F = 0$.

Corrige-se este afastamento com o uso do fator de escalonamento R :

$${}^{t+\Delta t}\sigma = R \cdot \sigma, \quad (3.30)$$

$$\text{com } R = \frac{\sigma_y^0 + A \cdot {}^{t+\Delta t}\bar{D}}{{}^t\bar{\sigma}} \quad (3.31)$$

O valor de A é definido em (3.12). O índice t, em ${}^t\bar{\sigma}$ (3.28) indica que valor se refere ao início do incremento. \bar{D} corresponde à deformação plástica efetiva:

$${}^{t+\Delta t}\bar{D} = {}^t\bar{D} + \frac{d\lambda \cdot a^T \cdot \sigma}{\bar{\sigma}} \quad (3.32)$$

CAPÍTULO 4

ELEMENTO DE CASCA

4.1. Introdução

Neste capítulo é apresentado o elemento de casca fina a ser implementado no presente trabalho. Desenvolveu-se o elemento "Slick" de casca fina baseado no elemento de Nagtegaal & Slater [19]. Este faz parte da família dos elementos de casca fina conhecidos como "Semiloof" [22].

O elemento "Slick" distingue-se do "Semiloof" por utilizar funções interpolação de baixa ordem. Tem, por isto, a vantagem da maior facilidade de uso e de implementação; em contrapartida, admite apenas pequenos incrementos de rotações.

O fenômeno da rigidez excessiva para cascas finas (locking) é contornado com o uso das hipóteses de Kirchhoff discretizado.

Um problema, à semelhança com o observado por Cook [61] para o elemento "Semiloof", recai na dificuldade para a formulação dos elementos de interligação.

4.2. Descrição dos graus de liberdade do elemento.

O presente elemento de casca possui 9 nós, cujos graus de liberdade, inicialmente nas direções globais, são mostrados na Figura 15. Os vértices têm apenas deslocamentos; os demais nós, localizados nos pontos médios das laterais e no centróide, possuem graus de liberdade de rotação.

A seguir, por conveniência da formulação, são feitas as mudanças de bases das rotações para as direções locais (s,t,n),

mostradas na Figura 16. Em vista disto, tem-se a configuração intermediária, ilustrada pela Figura 17, em que se notam as rotações $(\theta_s, \theta_t, \theta_n)$, orientadas segundo as direções locais.

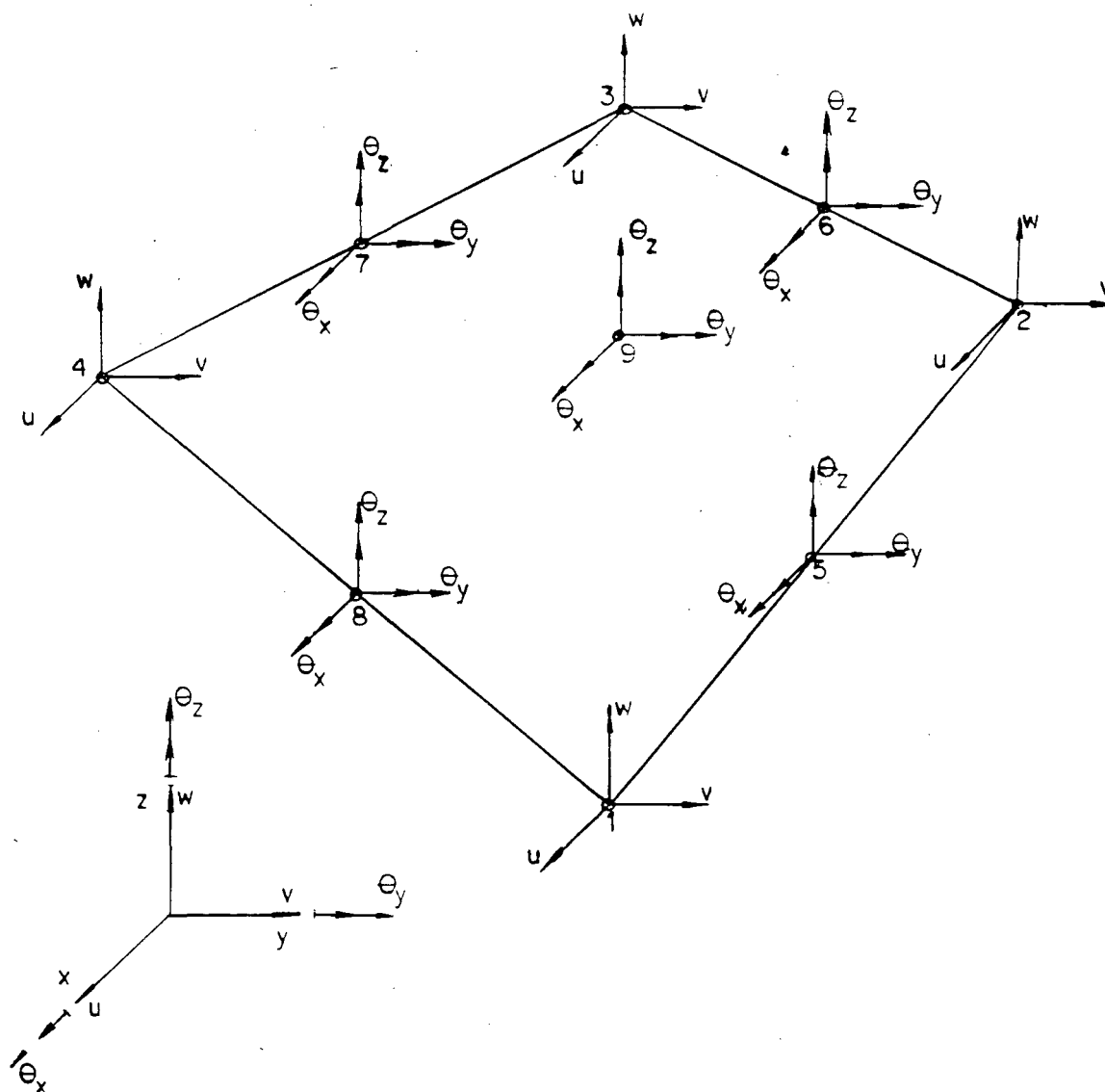


Figura 15 - Graus de liberdade segundo as direções globais, antes das mudanças de base.

Nas etapas subseqüentes dos cálculos, as rotações θ_n e

θ_t dos nós laterais assim como as rotações θ_s , θ_t e θ_n do centróide são eliminadas em função dos demais graus de liberdade.

Disto resulta, finalmente, na configuração dos graus de liberdade, independentes, do elemento Slick conforme mostra a Figura 18; deve-se ressaltar que foi adotada uma convenção de sinais para as rotações θ_s segundo a qual o sentido positivo é apontado para o nó do vértice adjacente de maior numeração.

As explicações e justificativas para os procedimentos acima serão apresentadas no decorrer do capítulo.

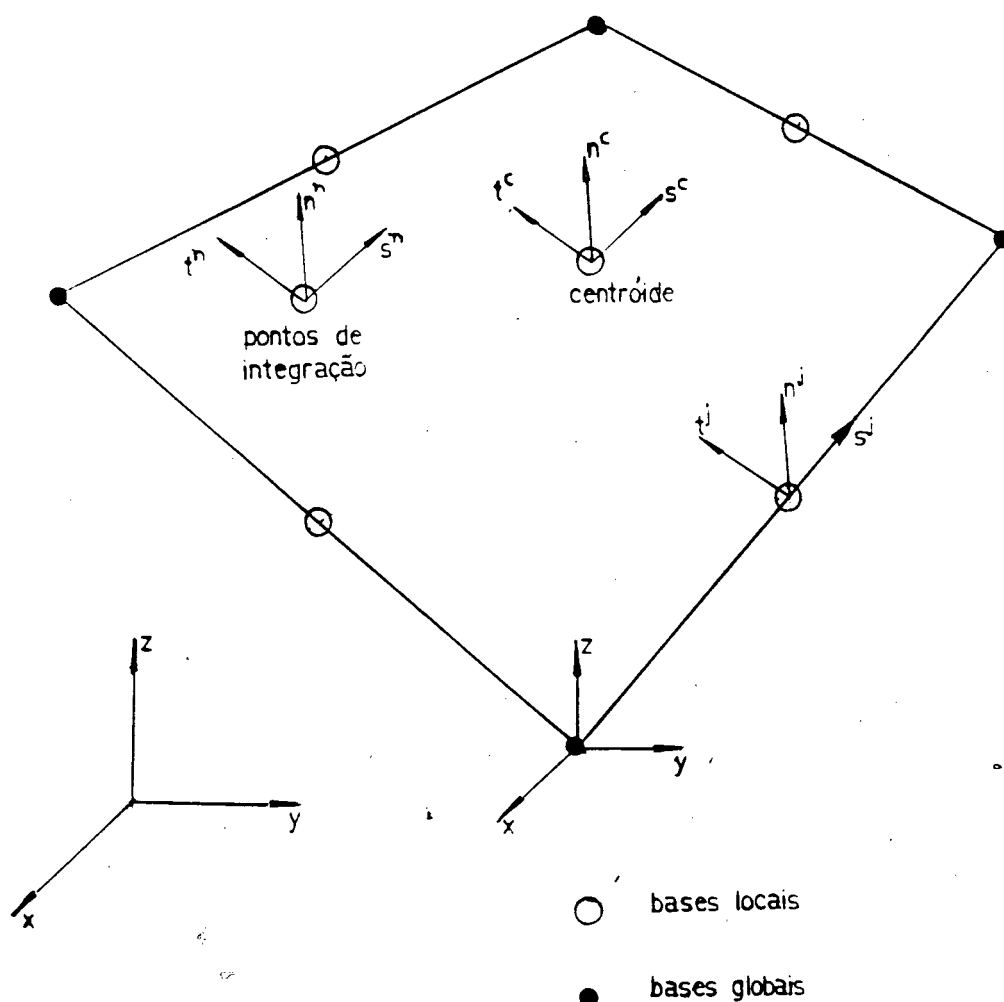
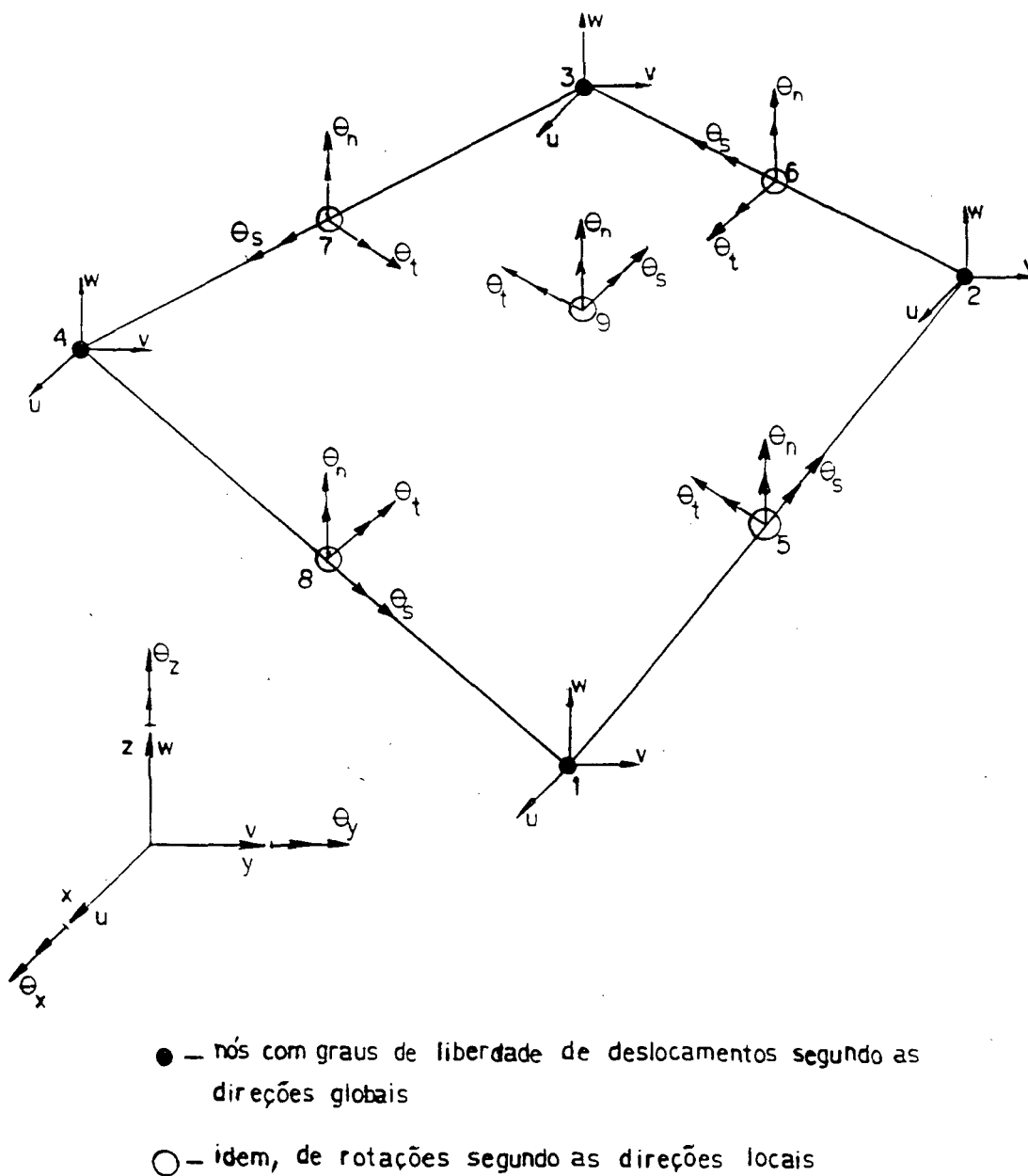


Figura 16 - Bases do elemento



Graus de liberdade independentes:

- a) deslocamentos u, v, w dos nós 1, 2, 3 e 4;
- b) rotações θ_s dos nós 5, 6, 7 e 8.

Graus de liberdade dependentes:

- a) rotações θ_t e θ_n dos nós 5, 6, 7 e 8;
- b) rotações θ_s , θ_t e θ_n do nó 9.

Figura 17 — Graus de liberdade, dependentes e independentes, do elemento.

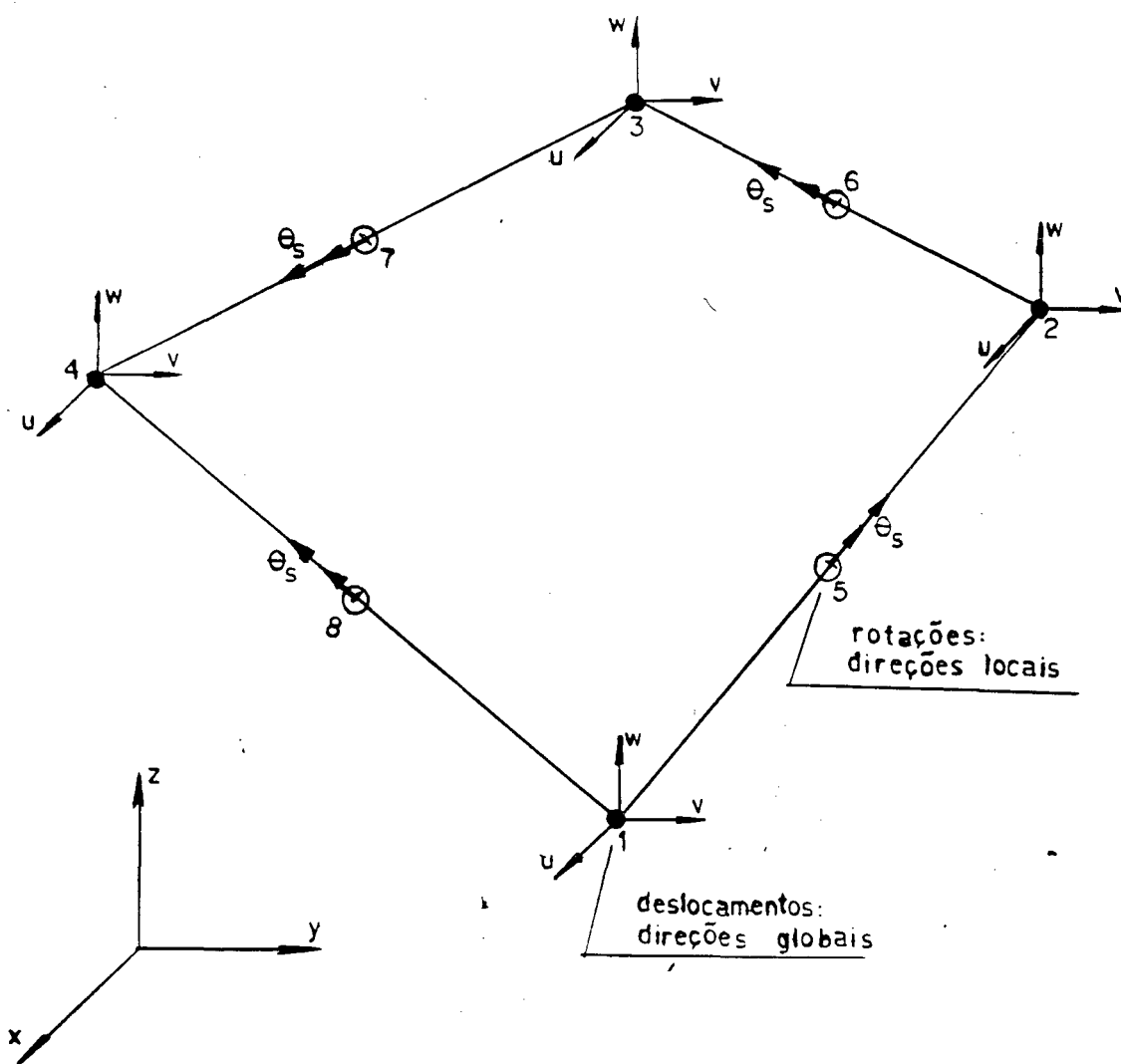


Figura 18 - Graus de liberdade do elemento.

4.3. Matriz da relação deformação/graus de liberdade nodais.

O objetivo desta seção é expor os principais passos que serão necessários para a obtenção da matriz B da relação deformação/ graus de liberdade nodais.

que

A deformação que se expressa por [41]

$$\left\{ \varepsilon \right\} = \left[B \right] \left\{ d \right\}, \quad (4.1)$$

onde:

$$\left\{ \varepsilon \right\} = \text{vetor deformação,}$$

$$\left[B \right] = \text{matriz da relação deformação/graus de liberdade nodais,}$$

$$\left\{ d \right\} = \text{vetor dos graus de liberdade do elemento,}$$

é calculada nos pontos de integração, segundo as respectivas bases locais mostradas na Figura 16. Os componentes de ε serão denotados por

$$\left\{ \varepsilon \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{ss} \\ \varepsilon_{tt} \\ \gamma_{st} \end{array} \right\}. \quad (4.2)$$

Os efeitos de membrana e de flexão são analisados separadamente, admitindo-se que

$$\left\{ \varepsilon \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{oss} - \delta \cdot \kappa_{ss} \\ \varepsilon_{ott} - \delta \cdot \kappa_{tt} \\ \gamma_{ost} - \delta \cdot \kappa_{st} \end{array} \right\}, \quad (4.3)$$

onde:

ε_{oss} , ε_{ott} e ε_{ost} são as deformações devidas aos efeitos de membrana;

κ_{ss} , κ_{tt} e κ_{st} são as variações de curvatura causadas pela flexão da casca;

δ é a cota medida segundo a direção local perpendicular à superfície média.

Assim, a matriz B poderá ser decomposta em

$$\left\{ \varepsilon \right\} = \left[B \right] \left\{ d \right\} = \left[B_m - B_f \right] \left\{ d \right\}, \quad (4.4)$$

com:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{Oss} \\ \varepsilon_{Otl} \\ \gamma_{Ost} \end{Bmatrix} = \left[B_m \right] \left\{ d \right\}, \quad (4.5)$$

$$\delta \begin{Bmatrix} \kappa_{ss} \\ \kappa_{tt} \\ \kappa_{st} \end{Bmatrix} = \left[B_f \right] \left\{ d \right\} \quad (4.6)$$

Em resumo, os pontos essenciais para se chegar à matriz B são a obtenção de ε_{Oss} , ε_{Otl} , ε_{Ost} , κ_{ss} , κ_{tt} e κ_{st} que serão mostrados nas seções seguintes. Os apêndices 3 e 4 apresentam a implementação dessa matriz.

4.4. Descrição da geometria.

Trata-se de um elemento isoparamétrico, cuja geometria é estabelecida através dos quatro nós dos vértices, como mostra a figura 18.

Os pontos pertencentes à superfície média da casca são localizados através da expressão

$$x = \sum_{i=1}^4 \phi_i x_i, \quad (4.7)$$

onde as funções de interpolação ϕ_i são expressas por:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta), \\ \phi_2 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta), \\ \phi_3 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta), \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\phi_4 = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta).$$

As coordenadas naturais ξ e η estão contidas no intervalo $[-1, +1]$.

4.5. Determinação das bases locais.

Nos modelos de placas e cascas prevalece o estado plano de tensões, onde a tensão de tração na direção normal à superfície média é considerada desprezável. Tal fato está embutido na relação constitutiva, que foi vista na seção 3.2.5 do Capítulo 3.

As bases locais para o cálculo das tensões e deformações são determinadas em função das considerações acima, ou seja, um dos seus vetores deve ser perpendicular à casca.

Particularmente, este tipo de elemento, que apresenta um campo de deslocamentos descritos por funções bilineares, requer um cuidado adicional quanto à escolha das direções tangenciais referentes às bases locais [22], [23]. Devido ao tratamento a ser dado para as deformações de membrana γ_{xy} , considerando-as constantes ao longo do elemento, as bases serão definidas de forma tal a serem aproximadamente paralelas às suas laterais.

O primeiro passo para a definição dessas bases locais será a obtenção da base localizada no centróide. Uma escolha natural dos vetores unitários, aproximadamente paralelos às laterais, poderia ser

$$a = \frac{\frac{\partial x}{\partial \xi}}{\left| \frac{\partial x}{\partial \xi} \right|} \quad (4.9)$$

e

$$b = \frac{\frac{\partial x}{\partial \eta}}{\left| \frac{\partial x}{\partial \eta} \right|} \quad (4.10)$$

onde

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{4} [x_2 + x_3 - x_1 - x_4] \quad (4.11)$$

$$e \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{1}{4} [x_3 + x_4 - x_1 - x_2] \quad (4.12)$$

são obtidos a partir da equação (4.7).

No entanto, estes vetores geralmente não formam bases ortogonais, pois os elementos podem ter um formato não retangular. O método utilizado para contornar este problema é o de construir uma base ortonormal que forme ângulos iguais em relação aos vetores a e b , conforme ilustra a Figura 19.

O objetivo exige uma etapa intermediária de cálculo da bissetriz α e sua perpendicular β :

$$\alpha = a + b, \quad (4.13)$$

$$\beta = a - b \quad (4.14)$$

Finalmente obtém-se os vetores da base local:

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\alpha}{|\alpha|} + \frac{\beta}{|\beta|} \right], \quad (4.15)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\alpha}{|\alpha|} - \frac{\beta}{|\beta|} \right] \quad (4.16)$$

$$n = \frac{a \times b}{|a \times b|}, \quad (4.17)$$

Os vetores acima determinam a base local no centróide. Se o elemento for plano, as bases locais nos pontos de integração serão coincidentes com a do centróide; caso contrário, a determinação do sistema local se faz na sequência descrita abaixo.

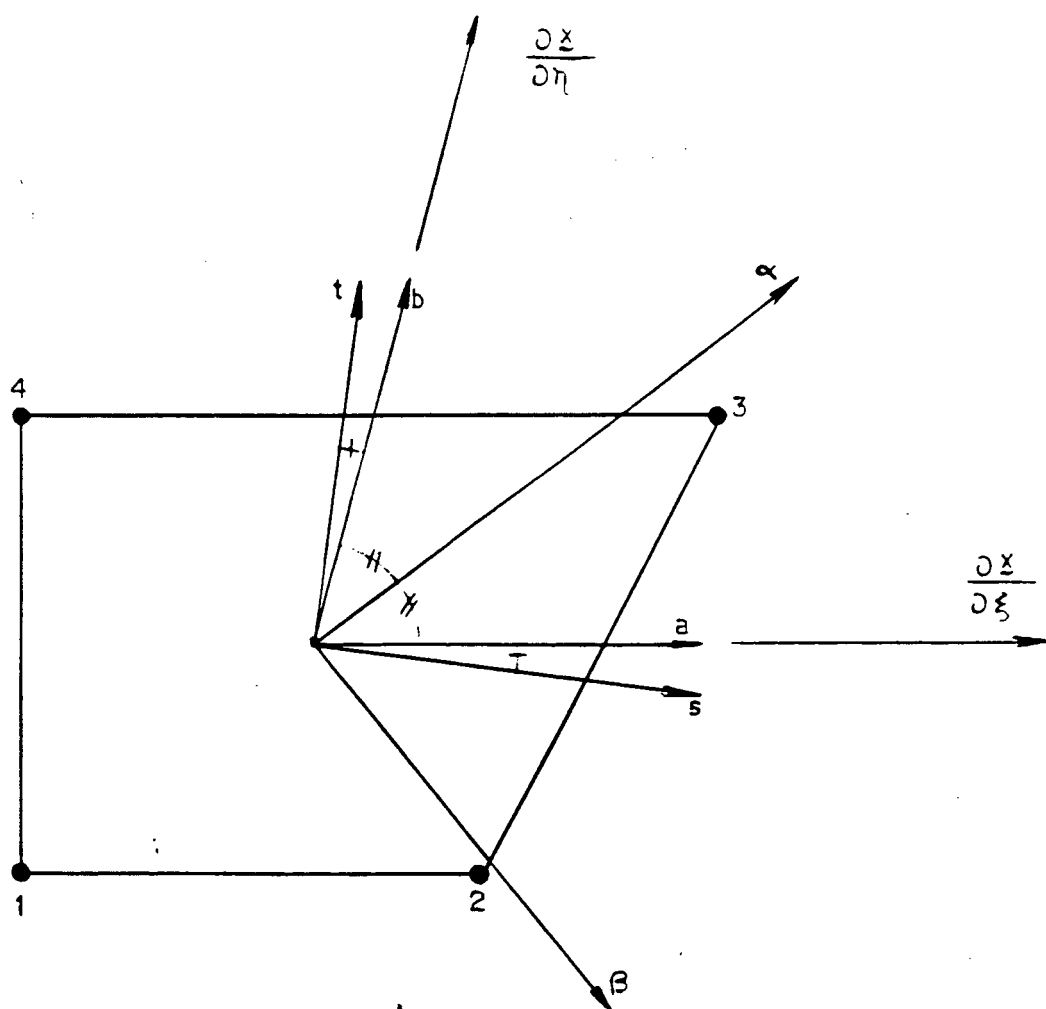


Figura 19 - Base local (s, t) do centróide.

O vetor normal \mathbf{n}' , no ponto de integração, é calculado segundo a equação (4.17).

Os demais vetores (\mathbf{s}' , \mathbf{t}') requerem uma mudança de base através do tensor \mathbf{T} , aplicados, respectivamente, em \mathbf{s} e \mathbf{t} :

$$\mathbf{s}' = \mathbf{T} \cdot \mathbf{s}, \quad (4.18)$$

$$\mathbf{t}' = \mathbf{T} \cdot \mathbf{t} \quad (4.18a)$$

com

$$\mathbf{T} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2' \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{n}' \otimes \mathbf{n}, \quad (4.19)$$

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{n}'}{|\mathbf{n} \times \mathbf{n}'|}, \quad (4.20)$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{e}_1, \quad (4.21)$$

$$\mathbf{e}_2' = \mathbf{n}' \times \mathbf{e}_1, \quad (4.22)$$

em que o símbolo \otimes indica um produto tensorial.

Pode ser verificado que o tensor \mathbf{T} rotaciona os vetores \mathbf{s} e \mathbf{t} , da mesma forma que rotaciona o vetor \mathbf{n} , de maneira a ter

$$\mathbf{n}' = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \quad (4.23)$$

4.6. Campo de deslocamentos.

O campo de deslocamentos no interior de um elemento é determinado através de seus deslocamentos nodais u_i e das funções interpolação apresentadas na equação (4.8), ou seja

$$u = \sum_{i=1}^4 \phi_i(\xi, \eta) u_i \quad (4.24)$$

4.7. Deformações devidas aos efeitos de membrana.

As deformações são determinadas em relação às bases locais.

4.7.1. Determinação de ϵ_{oss} e ϵ_{ott} .

As deformações ϵ_{oss} e ϵ_{ott} têm as seguintes definições:

$$\epsilon_{oss} = \frac{\partial u_s}{\partial s}, \quad (4.25)$$

$$\epsilon_{ott} = \frac{\partial u_t}{\partial t}, \quad (4.26)$$

com

$$u_s = \phi_i u_i \circ s, \quad (4.27)$$

$$u_t = \phi_i u_i \circ t. \quad (4.28)$$

As derivadas em relação a s e t são dadas por [22]:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial s} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial s} & \frac{\partial \eta}{\partial s} \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} & \frac{\partial \eta}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \end{Bmatrix}, \quad (4.29)$$

onde

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial s} & \frac{\partial \eta}{\partial s} \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} & \frac{\partial \eta}{\partial t} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \quad (4.29.a)$$

é o inverso do jacobiano, que é expresso por:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial \xi} & \frac{\partial t}{\partial \xi} \\ \frac{\partial s}{\partial \eta} & \frac{\partial t}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

com

$$\frac{\partial s}{\partial \xi} = s \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial s}{\partial \eta} = s \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = t \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial t}{\partial \eta} = t \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad (4.32)$$

Então:

$$\varepsilon_{oss} = \frac{\partial \phi_i}{\partial s} u_i \cdot s \quad (4.33)$$

$$\varepsilon_{ott} = \frac{\partial \phi_i}{\partial t} u_i \cdot t \quad (4.34)$$

4.7.2. Determinação do cisalhamento γ_{ost}

Conforme relatado por Nagtegaal [22] e MacNeal[23], o elemento torna-se excessivamente rígido se γ_{ost} for calculado nos pontos de integração. A recomendação para contornar o problema consiste em determinar esta deformação no centróide e considerá-lo

como sendo constante em todo o elemento.

Assim:

$$\gamma_{Ost}^n = 2 \cdot \epsilon_{Ost}^n = \left[\frac{\partial \phi_i^c}{\partial t} s^c + \frac{\partial \phi_i^c}{\partial s} t^c \right] \cdot u_i, \quad (4.35)$$

onde o índice c denota que a deformação é calculada no centróide, e cujo valor é utilizado em todos os pontos de integração n.

4.8. Efeitos de flexão.

Os efeitos de flexão são calculados a partir das rotações dos nós 5,6,7,8 e 9 que, por sua vez, estão acoplados aos efeitos de membrana manifestados através dos nós 1 a 4.

As rotações dentro do elemento, segundo as direções globais, são dadas por

$$\theta = \sum_{j=5}^9 \psi_j \theta_j, \quad (4.36)$$

onde os ψ_j são funções interpolação quadráticas completas da forma:

$$\psi_j(\xi, \eta) = a_j + b_j \xi + c_j \eta + d_j \xi^2 + e_j \xi \eta + f_j \eta^2,$$

Os coeficientes a_j , b_j , ..., f_j , das equações acima, foram determinados por Nagtegaal de tal forma que o elemento possa representar, exatamente, os estados de curvatura constante que, por sua vez, se originam do campo de rotações variando linearmente.

O autor considerou ainda uma condição adicional para as rotações em cada nó lateral j:

$$\bar{\theta}_j = \frac{1}{L_j} \int_{L_j} \sum_{k=5}^9 \psi_k(\xi, \eta) \theta_k dL_j, \quad (4.37)$$

com L_j sendo o comprimento do lado j .

Então, os $\bar{\theta}_j$ correspondem aos valores médios das rotações calculadas ao longo dos L_j . Isto assegura uma continuidade C^1 , generalizada, entre os elementos vizinhos.

Assim as funções interpolação serão as seguintes:

$$\psi_5(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} \eta - \frac{3}{16} \xi^2 + \frac{9}{16} \eta^2 + \bar{e}_5 \xi \eta, \quad (4.38)$$

$$\psi_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \xi + \frac{9}{16} \xi^2 - \frac{3}{16} \eta^2 + \bar{e}_6 \xi \eta, \quad (4.39)$$

$$\psi_7(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \eta - \frac{3}{16} \xi^2 + \frac{9}{16} \eta^2 - \bar{e}_5 \xi \eta, \quad (4.40)$$

$$\psi_8(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} \xi + \frac{9}{16} \xi^2 - \frac{3}{16} \eta^2 - \bar{e}_6 \xi \eta, \quad (4.41)$$

$$\psi_9(\xi, \eta) = 1 - \frac{3}{4} \xi^2 - \frac{3}{4} \eta^2 \quad (4.42)$$

Os coeficientes, \bar{e}_5 e \bar{e}_6 , dependem da geometria de cada elemento e procedimentos para seu cálculo estão na referência [19].

4.8.1. Cálculo das rotações segundo as direcções t e n (θ_t e θ_n).

Os elementos Slick e Semiloof utilizam, entre outros, o conceito do sólido degenerado em casca de Ahmad et alli [31].

A "casca degenerada", quando fina, tem o problema de travamento, causado pelo aparecimento da energia espúria de cisalhamento [55].

Este problema pode ser contornado, utilizando-se o artifício de ignorar a matriz rigidez relativa à energia de cisalhamento transversal. Contudo, torna-se necessário o uso das hipóteses de Kirchhoff discretizadas para substituir as equações que são perdidas com a eliminação daquela matriz rigidez [55].

No presente caso, as hipóteses de Kirchhoff discretizadas estabelecem que as variações de curvatura, calculadas a partir do campo de deslocamentos da equação (4.24), sejam iguais as rotações dadas pela equação (4.36).

Entretanto, a baixa ordem das funções interpolação do campo de deslocamentos, não permite considerar que as igualdades, mencionadas acima, sejam válidas em qualquer ponto da casca.

Em vista disso, Nagtegaal & Slater [19], selecionaram os pontos do elemento, onde se pode impor as hipóteses de Kirchhoff discretizadas, conforme as seguintes ponderações:

a) um elemento plano, ou seja uma placa, deve ser capaz de representar um campo de variação de curvatura constante. Salienta-se que os autores justificam o uso do elemento plano, devido ao fato que as cascas vão se tornando planas, à medida que se refina a malha.

b) uma placa, estando sujeita ao campo de variação de curvatura constante, terá rotações variando linearmente e, por conseguinte, deslocamentos variando quadraticamente;

c) supondo-se, então, que os deslocamentos nodais dos vértices do elemento coincidam com um campo, existente, de deslocamentos variando quadraticamente, pode-se afirmar que as rotações, nos pontos médios das laterais, segundo as direções mostradas na Figura 20, serão coincidentes com a variação de curvatura calculada a partir da equação (4.24).

A afirmação acima resume-se na equação

$$\theta_t = - \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi_i^j}{\partial s} u_i \cdot n^j, \quad (4.43)$$

onde os índices j indicam que os valores são calculados nos locais (ξ_j, η_j) onde estão os nós laterais.

As rotações segundo as direções normais n_j , mostradas na Figura 20, precisam ser consideradas, quando se modelam superfícies curvas [55]. Segundo Nagtegaal & Slater [19], estas rotações podem ser obtidas, com precisão quadrática, utilizando-se a seguinte equação:

$$\theta_n = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi_i^j}{\partial s} u_i \cdot t^j \quad (4.44)$$

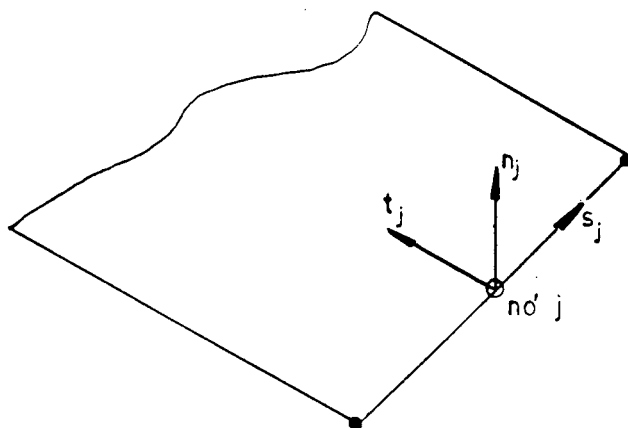
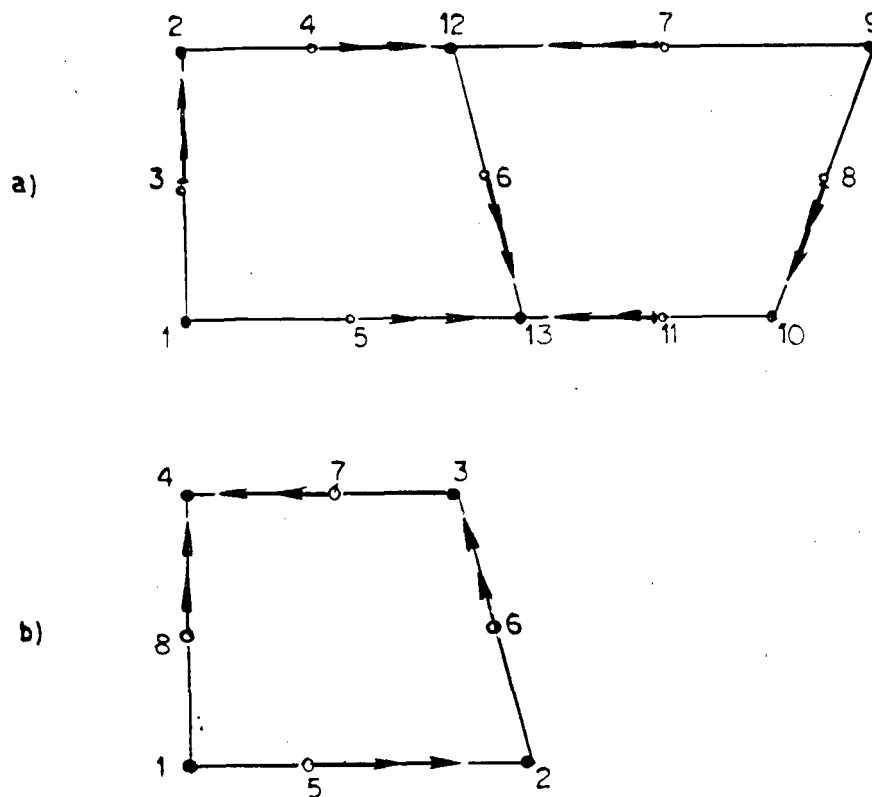


Figura 20 - Base local para um nó lateral j .

Formalmente, as equações (4.43) e (4.44) representam equações de restrição, permitindo que os θ_n e θ_t sejam eliminados.

em função dos graus de liberdade de deslocamentos u_i .



- a) Convenção de sinais à nível de estrutura: o sentido positivo é apontado para o nó do vértice vizinho com maior numeração global.
- b) Convenção de sinais para o elemento: sentido positivo apontando para o nó do vértice vizinho de maior numeração.

Figura 21 - Convenção de sinais.

As rotações nas direções locais s_j são os únicos graus de liberdade independentes. Na implementação do elemento é introduzida uma convenção de sinais, estabelecendo o sentido

positivo de rotação. Tanto a nível de elemento, quanto a nível de estrutura, se convencionou que o sentido positivo aponta para o nó do vértice adjacente com a maior numeração, conforme mostra a Figura 21.

4.8.2. Eliminação dos graus de liberdade do centróide.

Os graus de liberdade existentes no centróide poderiam ser mantidos independentes. No entanto, os autores preferem considerá-los dependentes em relação aos demais graus de liberdade de rotação.

As relações de dependência são determinadas, projetando-se as rotações segundo as direções da base local do centróide. Cada um dos componentes tem o seguinte equacionamento:

$$\theta_p \cdot s = \frac{1}{4} (3 \theta_6 + 3 \theta_8 - \theta_5 - \theta_7) \cdot s, \quad (4.45)$$

$$\theta_p \cdot t = \frac{1}{4} (3 \theta_5 + 3 \theta_7 - \theta_6 - \theta_8) \cdot t, \quad (4.46)$$

$$\theta_p \cdot n = \frac{1}{4} (\theta_5 + \theta_6 + \theta_7 + \theta_8) \cdot n. \quad (4.47)$$

Segundo Nagtegaal & Slater, este tipo de condensação permite ao elemento, que possua o formato retangular, representar corretamente o campo de variação linear da flexão nas direções naturais ξ e η .

4.8.3. Determinação das variações de curvatura κ_{ss} , κ_{tt} e κ_{st} .

As variações de curvaturas κ_{ss} , κ_{tt} e κ_{st} são expressas em função das rotações nodais, globais, θ_j , conforme as equações:

$$\mathcal{X}_{ss}^n = \sum_{j=5}^9 - \frac{\partial \psi_j^n}{\partial s} t^n \cdot \theta_j, \quad (4.48)$$

$$\mathcal{X}_{tt}^n = \sum_{j=5}^9 \frac{\partial \psi_j^n}{\partial t} s^n \cdot \theta_j, \quad (4.49)$$

$$\mathcal{X}_{st}^n = \sum_{j=5}^9 \left[\frac{\partial \psi_j^n}{\partial s} s^n - \frac{\partial \psi_j^n}{\partial t} t^n \right] \cdot \theta_j, \quad (4.50)$$

cujas deduções são mostradas no Apêndice 2.

As expressões acima não podem ser utilizadas diretamente na equação (4.3), que é o objetivo final. Para isso é preciso:

a) mudar as rotações θ_j para as respectivas direções locais (s^j, t^j, n^j) e (s^c, t^c, n^c) mostradas na Figura 16;

b) utilizar, em seguida, as equações (4.43) a (4.47), para eliminar os graus de liberdade dependentes.

O Apêndice 3 mostra, detalhadamente, a implementação dos procedimentos acima.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS NUMÉRICOS

5.1. Introdução.

Os exemplos resolvidos foram escolhidos para testar as características dos elementos, tanto em aplicações lineares como nos casos com não linearidades. Procurou-se os problemas com soluções, analíticas ou numéricas, fornecidas por outros autores.

5.2. Casos lineares.

5.2.1. "Patch test".

A finalidade destes testes é verificar a capacidade de o elemento descrever, exatamente, os estados de deformação constante, mesmo quando os elementos estão arrançados de forma distorcida. Estes indicam se os resultados numéricos convergem para a solução exata, à medida que se refina a malha.

O teste foi montado como sugerido por MacNeal & Harder [62]. A Figura 22 mostra a geometria e as propriedades elásticas do material.

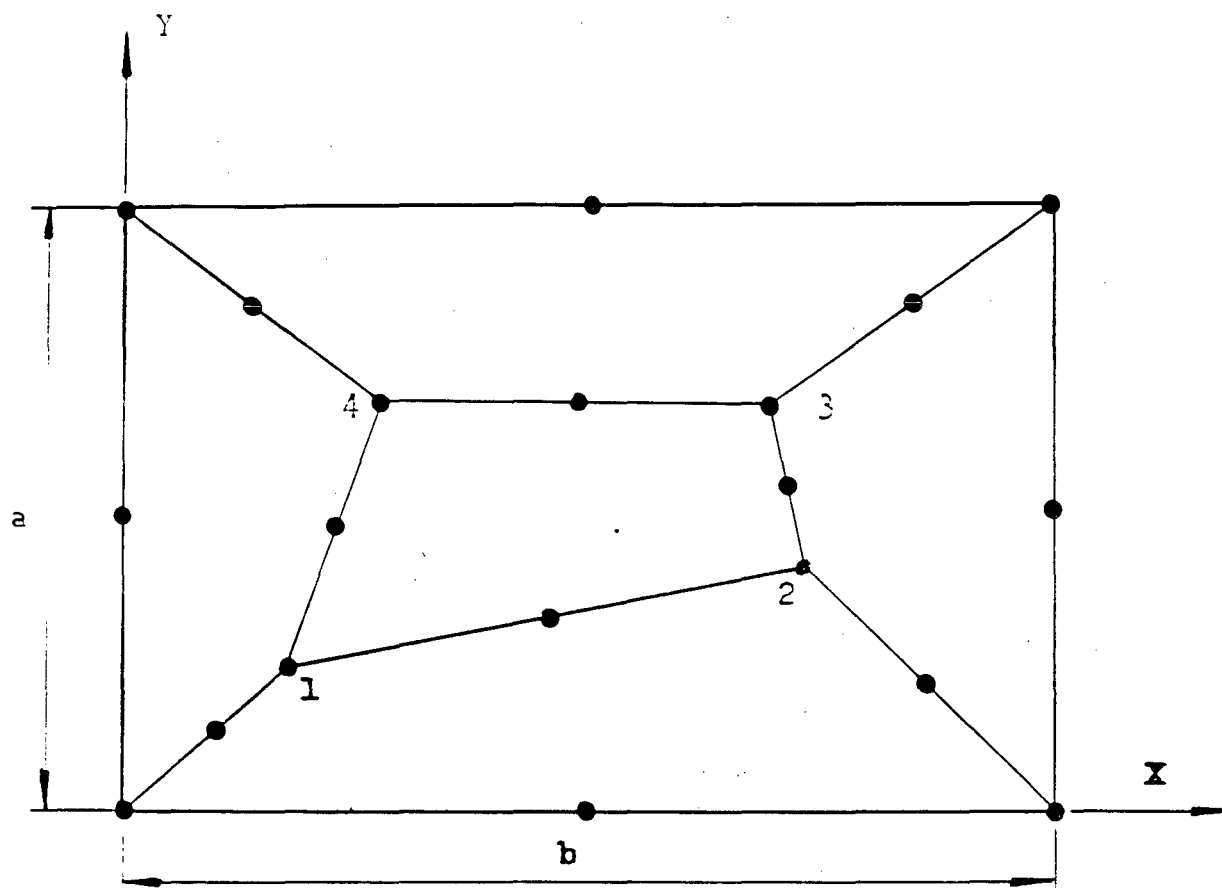
Os estados de deformação, tanto para os efeitos de membrana quanto para os de flexão, são impostos através das condições de contorno de deslocamento aos nós externos.

Para os efeitos de membrana, impõem-se os deslocamentos dados pelas expressões

$$u = 10^{-3} \cdot (x + y/2), \quad (5.1)$$

$$v = 10^{-3} \cdot (y + x/2),$$

cujos valores são mostrados na Figura 23.



Coordenadas dos nós

Nó	X	Y
1	0,04	0,02
2	0,18	0,03
3	0,16	0,08
4	0,08	0,08

Dimensões:

$$\begin{aligned}
 a &= 0,12 \\
 b &= 0,24 \\
 \text{espessura} &= 0,001
 \end{aligned}$$

Dados do material:

$$\begin{aligned}
 \text{Módulo de elasticidade (E)} &= 2,1 \times 10^6 \\
 \text{Coeficiente de Poisson } (\nu) &= 0,3
 \end{aligned}$$

Figura 22 - "Patch test": geometria e dados do material.

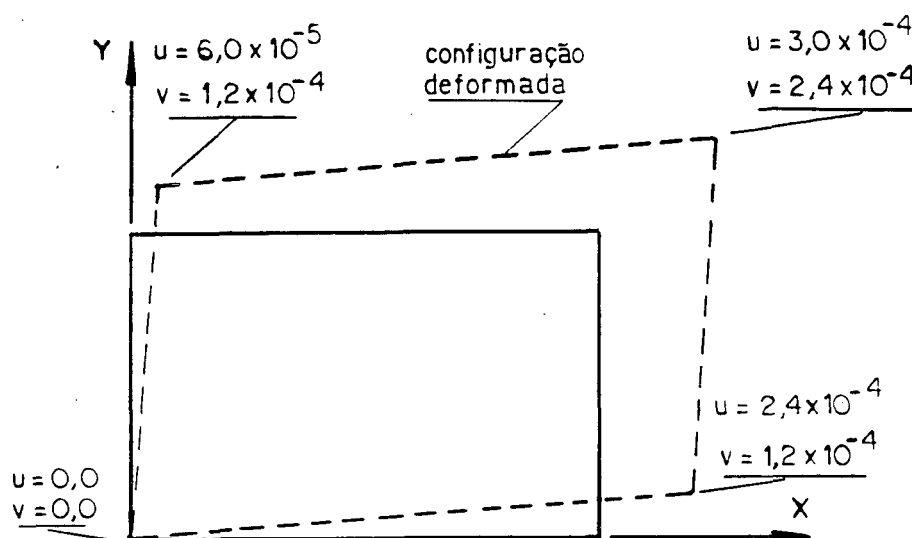


Figura 23 - "Patch test": condições de contorno para testar efeitos de membrana.

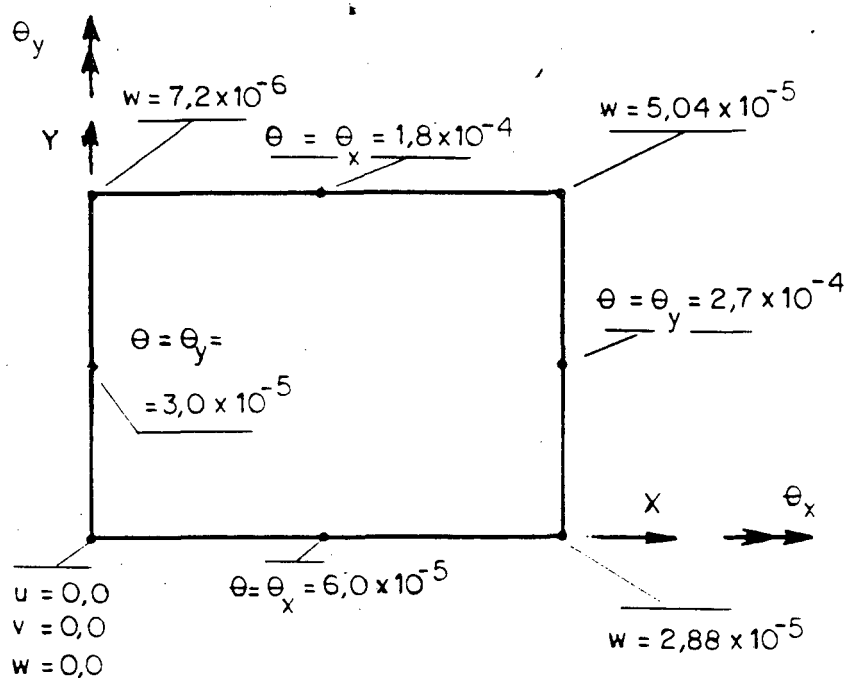


Figura 24 - "Patch test": condições de contorno para testar efeitos de flexão.

A solução exata , para esta condição de contorno, é dada por

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 1333,0 \\ \sigma_{yy} &= 1333,0 \\ \sigma_{xy} &= 400,0\end{aligned}\tag{5.2}$$

Para os efeitos de flexão, impõem-se os deslocamentos e rotações calculados segundo as expressões

$$\begin{aligned}w &= 10^{-3} \cdot (x^2 + xy + y^2)/2 , \\ \theta_x &= \frac{\partial w}{\partial y} = 10^{-3} \cdot (x + y/2) , \\ \theta_y &= - \frac{\partial w}{\partial x} = 10^{-3} \cdot (-x - y/2) ,\end{aligned}\tag{5.3}$$

cujos valores nodais são mostrados na Figura 24.

Os valores exatos das tensões nas fibras externas da placa, devido às condições de contorno acima, são dados por

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \pm 0.667 , \\ \sigma_{yy} &= \pm 0.667 , \\ \sigma_{xy} &= \pm 0.200\end{aligned}\tag{5.4}$$

Os resultados obtidos são resumidos na Tabela 1 em que, para cada tipo de carregamento, é mostrado o número de dígitos concordantes com a solução exata.

As soluções dos problemas acima foram efetuadas, com precisão dupla, no computador IBM 3090 instalado na COMPANHIA SIDERÚRGICA PAULISTA.

Levando-se em conta a situação desfavorável representada

pela grande quantidade de operações matemáticas necessárias à obtenção da matriz rigidez dos elementos, pode-se considerar que a precisão obtida foi satisfatória.

Tipo de carregamento	precisão (número de dígitos)
tração	8
cisalhamento de membrana	8
flexão pura	7
torção	8

Tabela 1 - Resultados do "Patch test".

5.2.2. Placa quadrada.

Os testes foram efetuados para uma placa quadrada com carga distribuída ou concentrada, e condições de contorno do tipo apoio simples ou engastado. Foram utilizadas malhas regulares.

As figuras 25 e 26 mostram a caracterização do problema.

Dada a simetria do exemplo, modelou-se apenas um quadrante da placa, aplicando-se um quarto do valor da carga concentrada ($P/4$).

Os resultados obtidos foram confrontados com as soluções analíticas apresentadas por Timoshenko [65], que são mostradas na Tabela 2.

Os gráficos da Figura 27 mostram as comparações dos resultados numéricos obtidos com os dados da tabela acima, usando-se deslocamentos normalizados. Por meio destes gráficos,

pode-se avaliar a convergência das respostas, à medida que se faz o refino da malha de elementos finitos.

Carregamento	Condições de contorno	deslocamento vertical no ponto central (w_A)
carga concentrada (P)	apoio simples	$0,0116 \cdot \frac{P \cdot L^2}{D} = 2,07872 \times 10^{-3}$
	engastado	$0,0056 \cdot \frac{P \cdot L^2}{D} = 1,00352 \times 10^{-3}$
carga distribuída (q)	apoio simples	$0,004062 \cdot \frac{q \cdot L^4}{D} = 1,819776 \times 10^{-5}$
	engastado	$0,00126 \cdot \frac{q \cdot L^4}{D} = 5,6448 \times 10^{-6}$

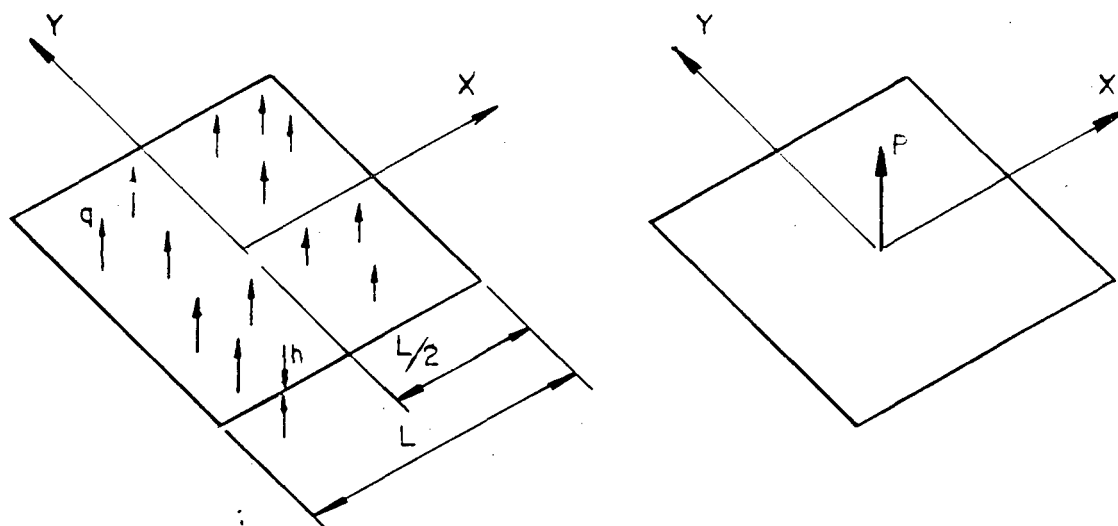
Observação: $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ (rigidez à flexão de placas)

h = espessura da placa.

Tabela 2 - Resultados analíticos de Timoshenko [65].

Todos os exemplos da placa quadrada apresentaram uma boa taxa de convergência; podendo-se considerar que, a partir da malha de 8x8 elementos, as respostas já são muito próximas das soluções analíticas.

Tipos de carregamento



comprimento lateral (L)	= 200,0
espessura (h)	= 0,01
módulo de elasticidade (E)	= $3,9 \times 10^9$
coeficiente de Poisson (ν)	= 0,3
carga distribuída (q)	= 160,0

Figura 25 - Placa quadrada: geometria e dados do problema.

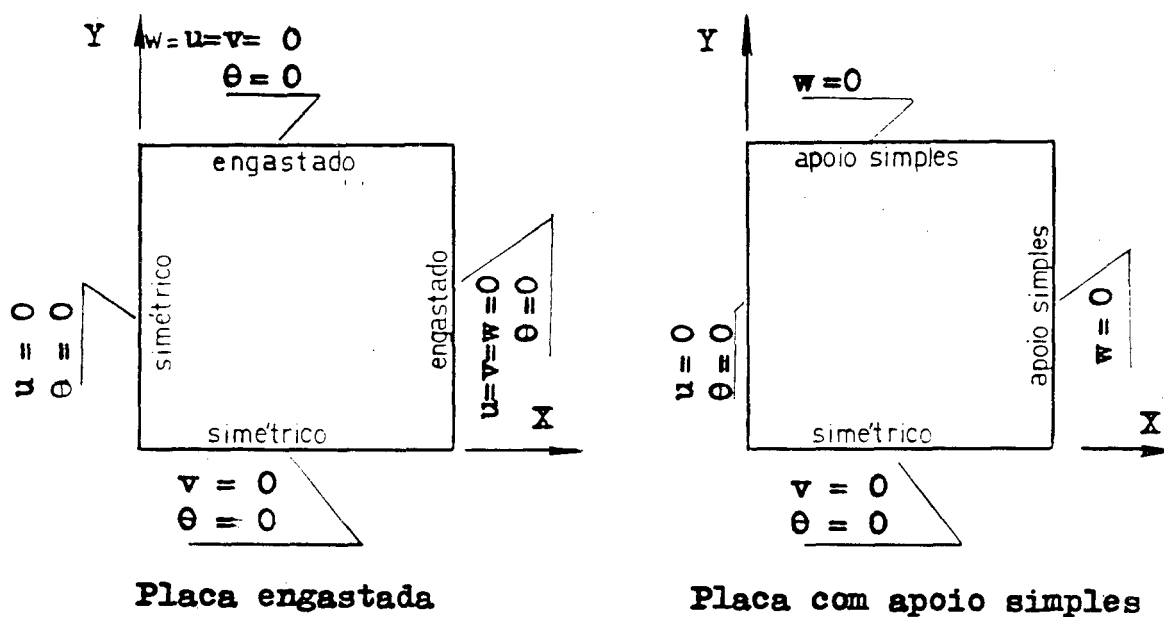


Figura 26 - Placa quadrada: condições de contorno

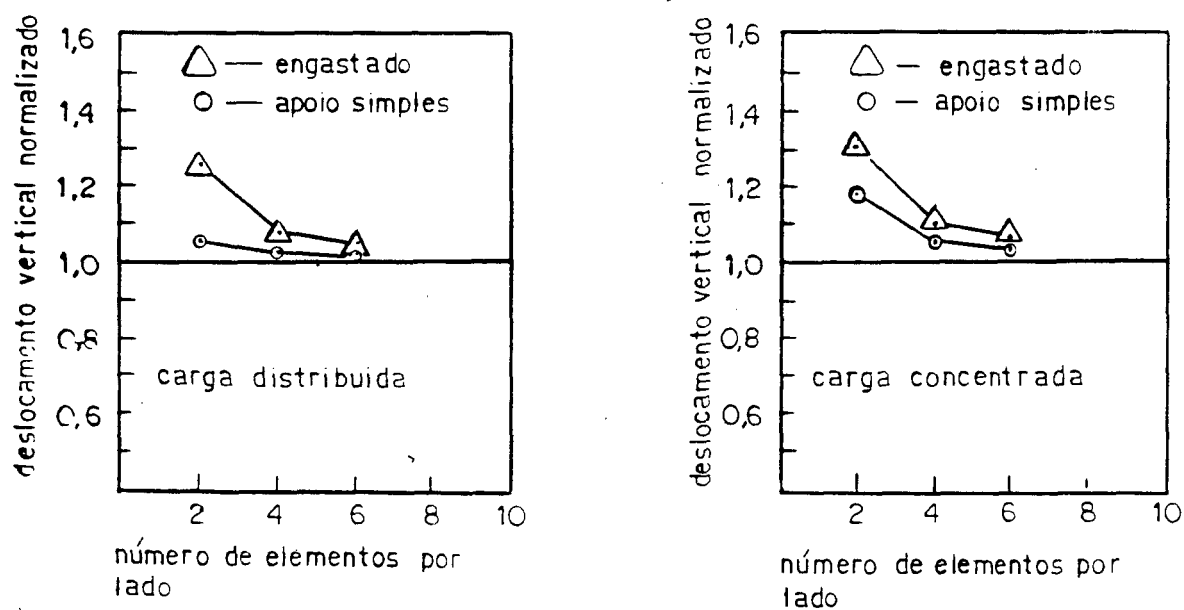


Figura 27 - Placa quadrada: resultados obtidos.

5.2.3. Telhado cilíndrico.

O tipo de problema, conhecido como telhado de Scordelis-Lo, foi utilizado por diversos autores (MacNeal & Harder [62], Huang & Hinton [63], Bathe [28], Belytschko [30]), para verificar o comportamento de elementos de casca em superfícies com curvatura simples.

O exemplo consiste em um setor de cilindro, apoiado em do diafragma rígido nas bordas curvas, livre nas demais bordas e submetido ao peso próprio. As figuras 28 e 29 mostram, respectivamente, a configuração e as condições de contorno.

Os resultados obtidos para o deslocamento no ponto médio do lado livre (borda reta) são mostrados na Figura 30. Os dados do gráfico foram normalizados em relação ao valor:

$$w_A = -0,3024 , \quad (5.5)$$

apresentado por MacNeal & Harder [63].

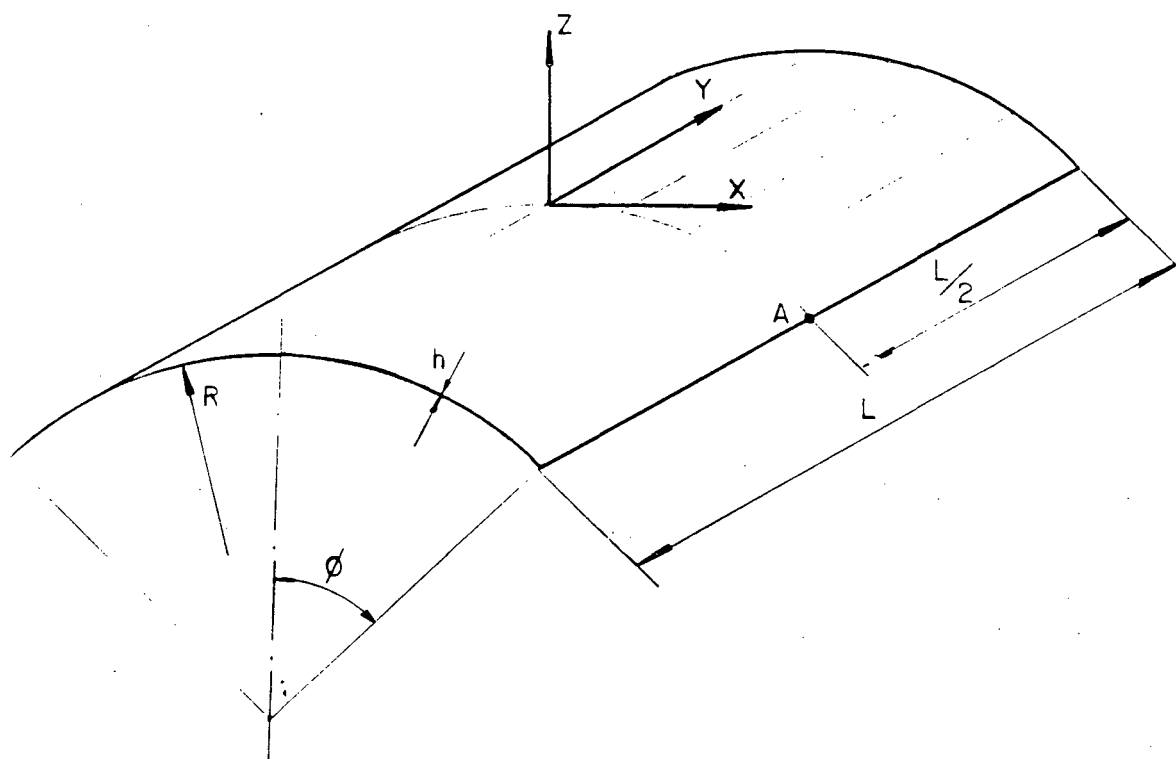
O gráfico da Figura 30 mostra a rápida convergência dos resultados obtidos, à medida que se progride no refino da malha de elementos finitos. Com um arranjo de 4 x 4 elementos, a resposta já é bem próxima do valor exato.

5.2.4. Cilindro puncionado.

Este exemplo foi modelado por malhas regulares, conforme mostrado na Figura 31.

O cilindro, apoiado nas suas extremidades com diafragma rígido, é submetido a forças concentradas diametralmente opostas que são aplicadas na parte central. As condições de contorno estão representadas na Figura 32 onde se nota a imposição das condições de simetria, o que permite considerar apenas um oitavo do

cilindro.



Comprimento (L)	= 50,0
Espessura (h)	= 0,25
Raio (R)	= 25,0
Ângulo (ϕ)	= 40,0°
Módulo de elasticidade (E)	= 4,32x10 ⁸
Coefficiente de Poisson (ν)	= 0,0
Carga distribuida (q)	= 90,0

Figura 28 - Telhado cilíndrico: geometria e dados do problema.

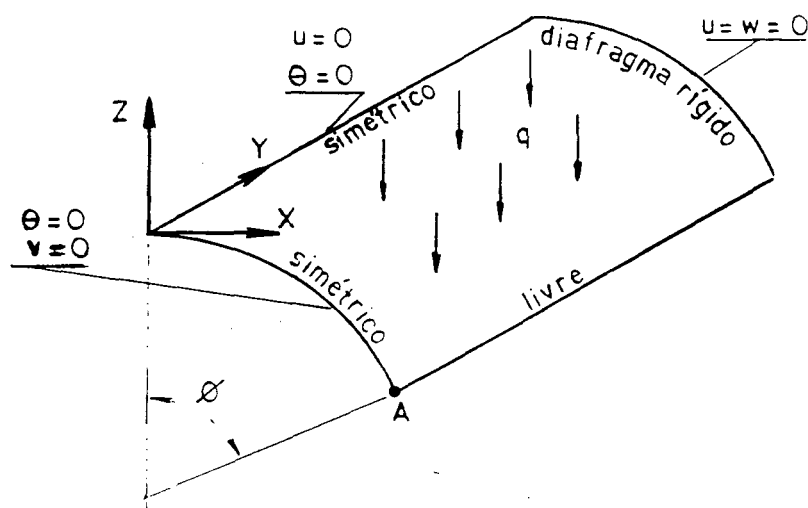


Figura 29 - Telhado cilíndrico: condições de contorno.

a)

Malha	deslocamento (w_A)
2 x 2	- 0,434314
4 x 4	- 0,314738
8 x 8	- 0,304386

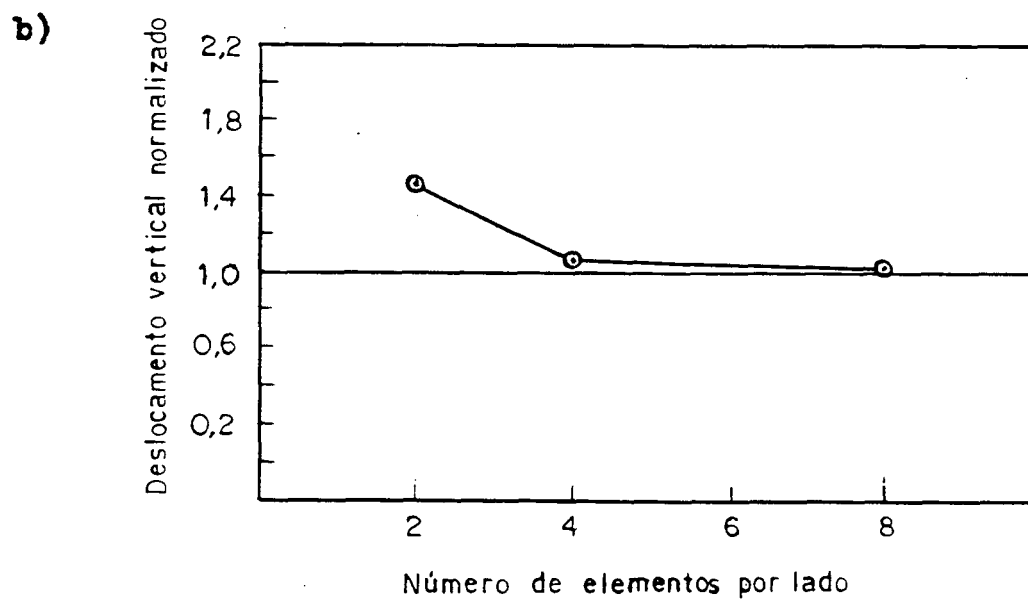


Figura 30 - Telhado cilíndrico: a) resultados obtidos
b) gráficos da taxa de convergência.

Segundo Huang e Hinton [63], este exemplo é o anterior, do teto de Scordelis-Lo, servem para testar a existência dos travamentos (locking) de membrana.

O resultado do deslocamento vertical, no ponto de aplicação das forças foi normalizado em relação ao do Belytschko [66],

$$w_A = -1.8245 \times 10^{-5} \quad (5.6)$$

O gráfico da Figura 33 mostra uma boa taxa de convergência do presente elemento de casca, embora seja mais lenta do que a apresentada no exemplo anterior.

5.2.5. Semi-esfera.

O comportamento em cascas com dupla curvatura foi testado com o exemplo proposto na Figura 34 que consiste em aplicar forças radiais, com sentidos alternados, em cada quadrante do círculo equatorial de uma semi-esfera.

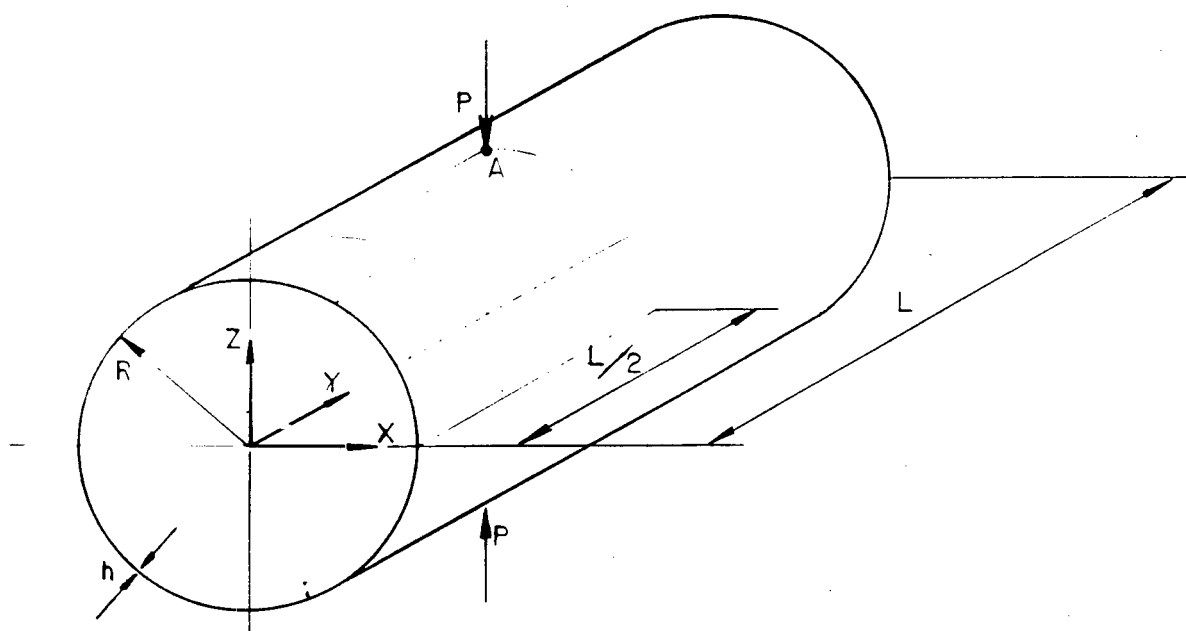
As condições de contorno estão mostradas na figura 35. Aí houve a possibilidade de modelar apenas um quarto da semi-esfera por causa das características de simetria da configuração.

Segundo Belytschko [66], o exemplo presta-se para testar a habilidade do elemento em descrever rotações de corpo rígido. Além disso [28], todos os elementos são oblíquos. Isto acentua a eventual presença dos travamentos de membrana, que é a inaptidão do elemento curvo, em apresentar deformações de membrana nulas, quando submetido à flexão pura.

Os deslocamentos radiais obtidos nos pontos de aplicação das cargas foram normalizados em relação à solução

$$w_A = 0,0940 \quad , \quad (5.7)$$

de MacNeal & Harder [62].



Comprimento (L) = 600,0

Raio (R) = 300,0

Módulo de elasticidade (E) = $3,0 \times 10^6$

Coefficiente de Poisson (ν) = 0,3

Carga concentrada (P) = 1,0

Condições de contorno: diafragma rígido nas extremidades.

Figura 31 - Cilindro puncionado: geometria e dados do problema.

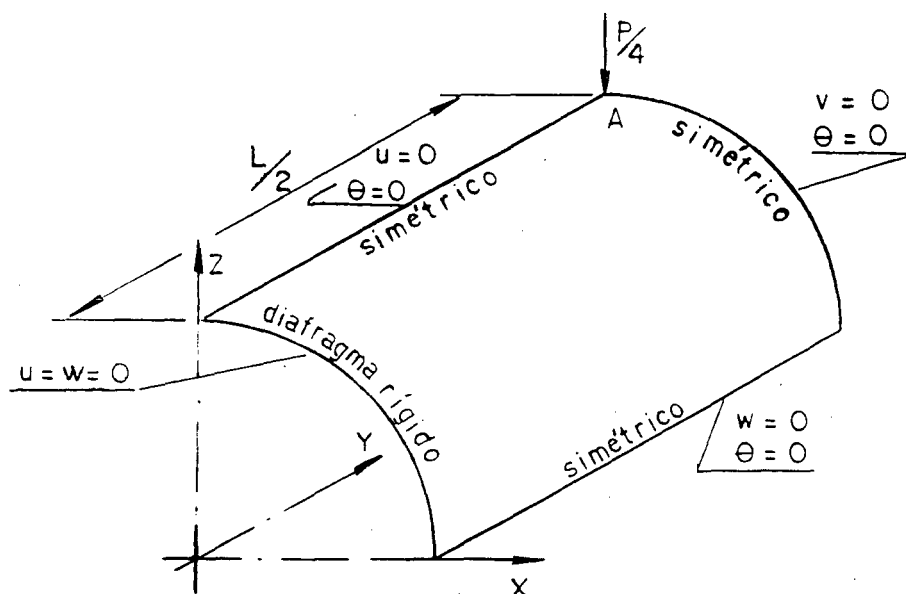


Figura 32 - Cilindro puncionado: condições de contorno.

a)	Malha	desloc. vertical em A
	2 x 2	$-1,718 \times 10^{-6}$
	4 x 4	$-1,189 \times 10^{-5}$
	6 x 6	$-1,610 \times 10^{-5}$
	8 x 8	$-1,813 \times 10^{-5}$

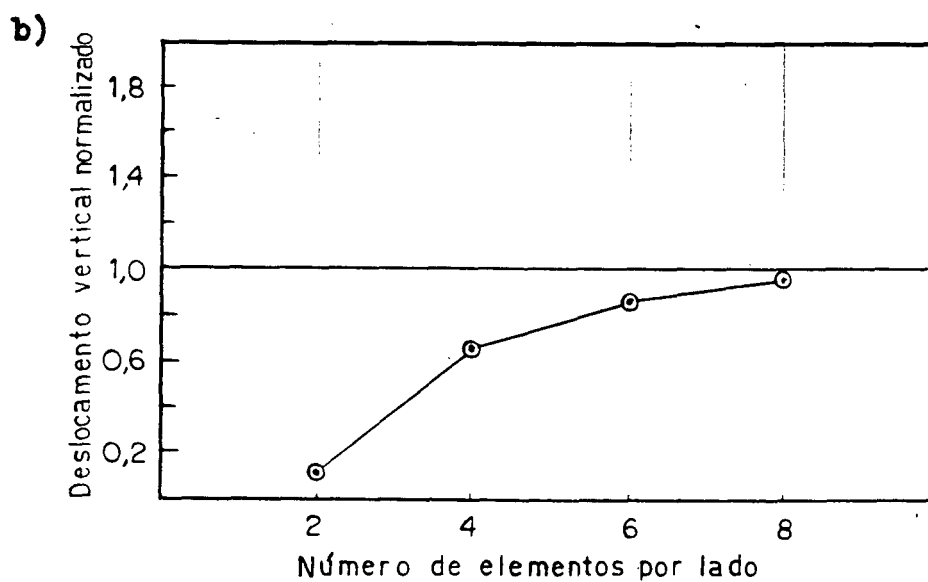
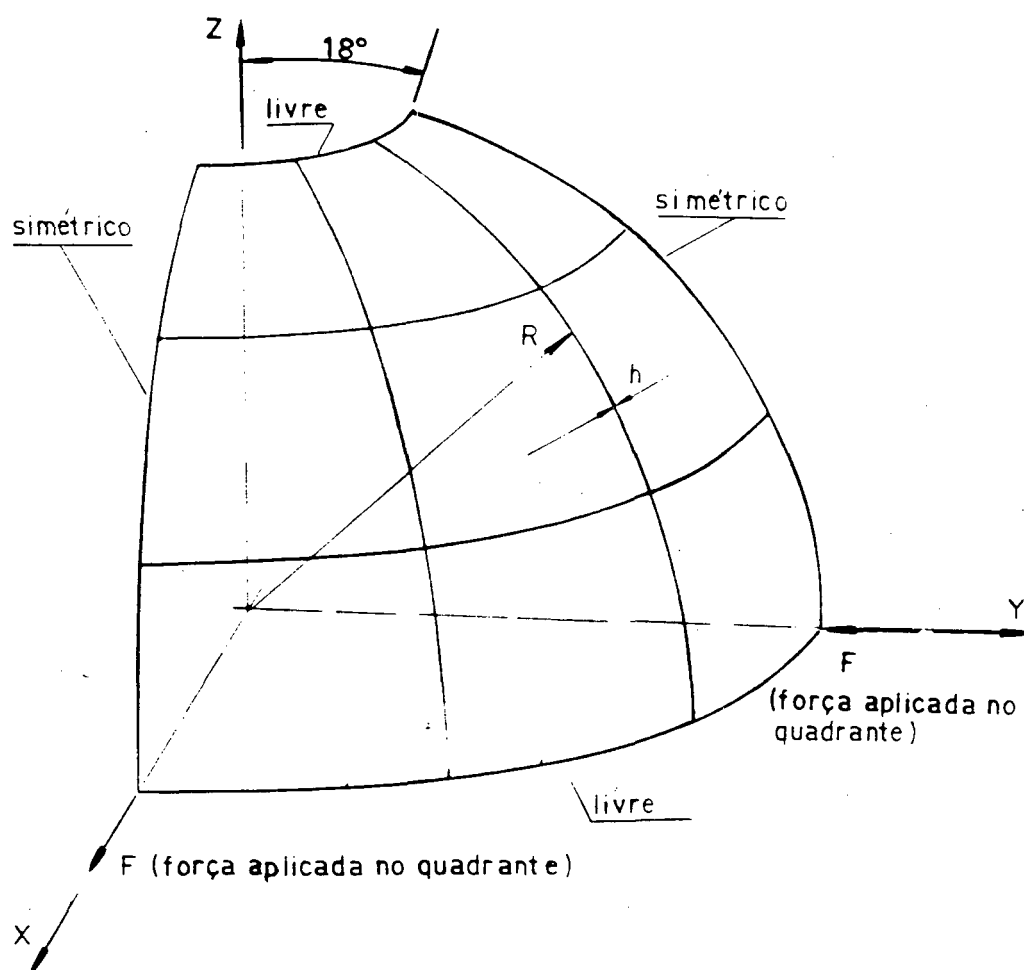


Figura 33 - Cilindro puncionado: a) resultados obtidos, b) gráfico da taxa de convergência.



Raio (R)	=	10,0
Espessura (h)	=	0,04
Módulo de elasticidade (E)	=	$6,825 \times 10^7$
Coefficiente de Poisson (ν)	=	0,3
Força concentrada (F)	=	2,0

Figura 34 - Semi-esfera: geometria e dados do problema.

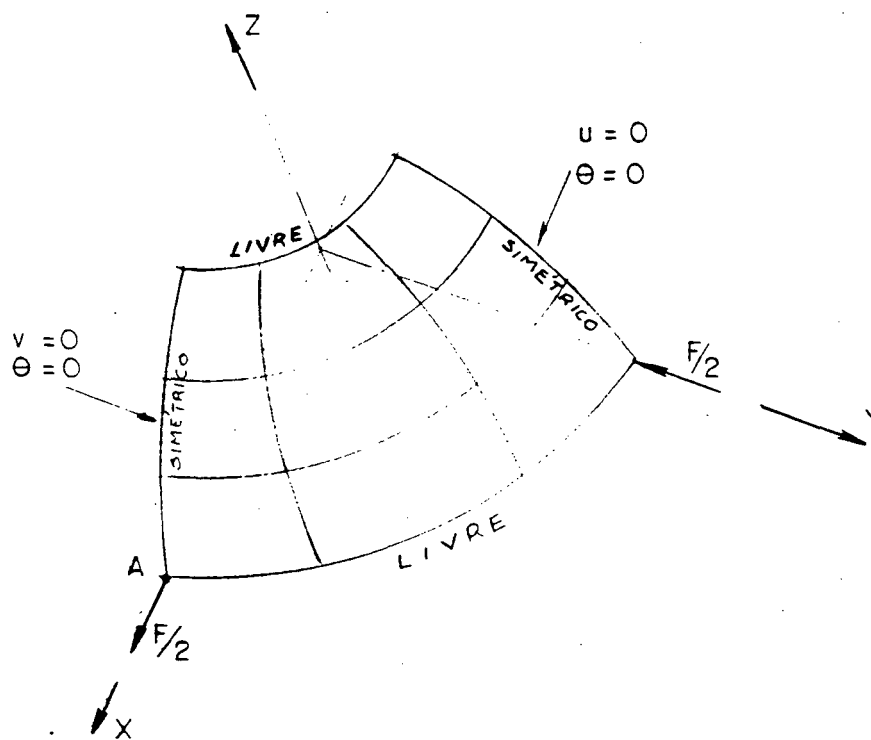


Figura 35 - Semi-esfera: condições de contorno.

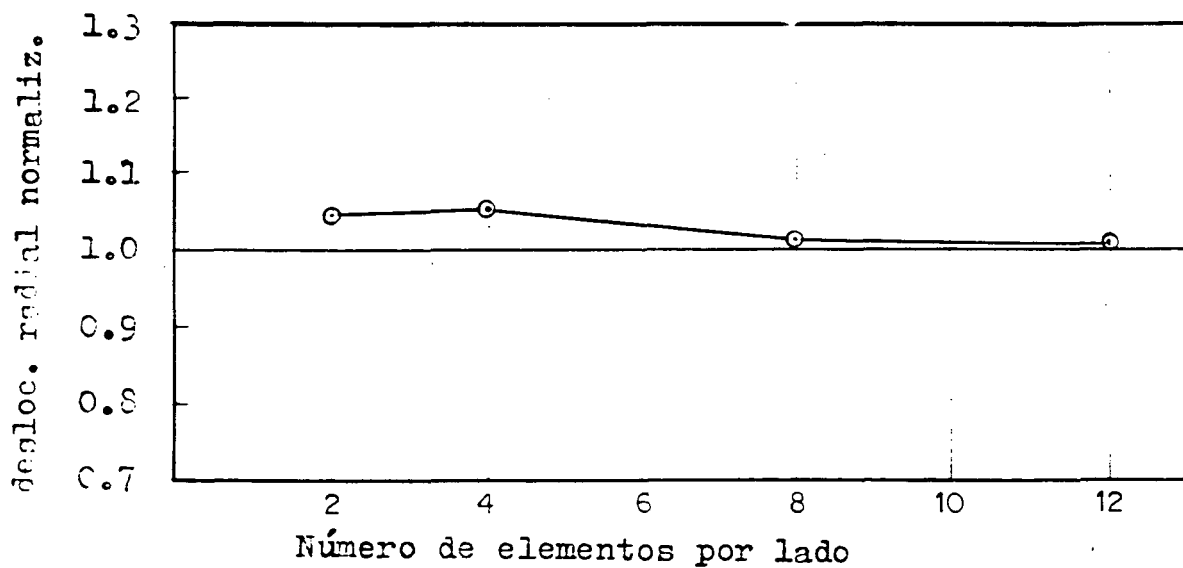


Figura 36 - Semi-esfera: deslocamentos radiais normalizados no ponto A.

Os resultados estão resumidos no gráfico da Figura 36 onde se verifica uma boa aproximação, em relação à solução indicada acima, a partir da malha 8×8 que possui um total de 387 graus de liberdade. Isto fornece uma boa indicação de que não houve travamento, nem problemas para descrever os movimentos de rotação de corpo rígido.

5.2.6. Viga retilínea.

Apresenta-se aqui um exemplo em que o elemento manifesta problemas de excessiva rigidez para o cisalhamento de membrana.

O elemento QUAD4, formulado por MacNeal & Harder [23], e o presente elemento têm procedimentos semelhantes no que tange ao cálculo do cisalhamento de membrana. O trabalho posterior daquele autor [62] mostrou que o elemento pode falhar quando a estrutura, submetida ao cisalhamento de membrana, for modelado por malhas distorcidas.

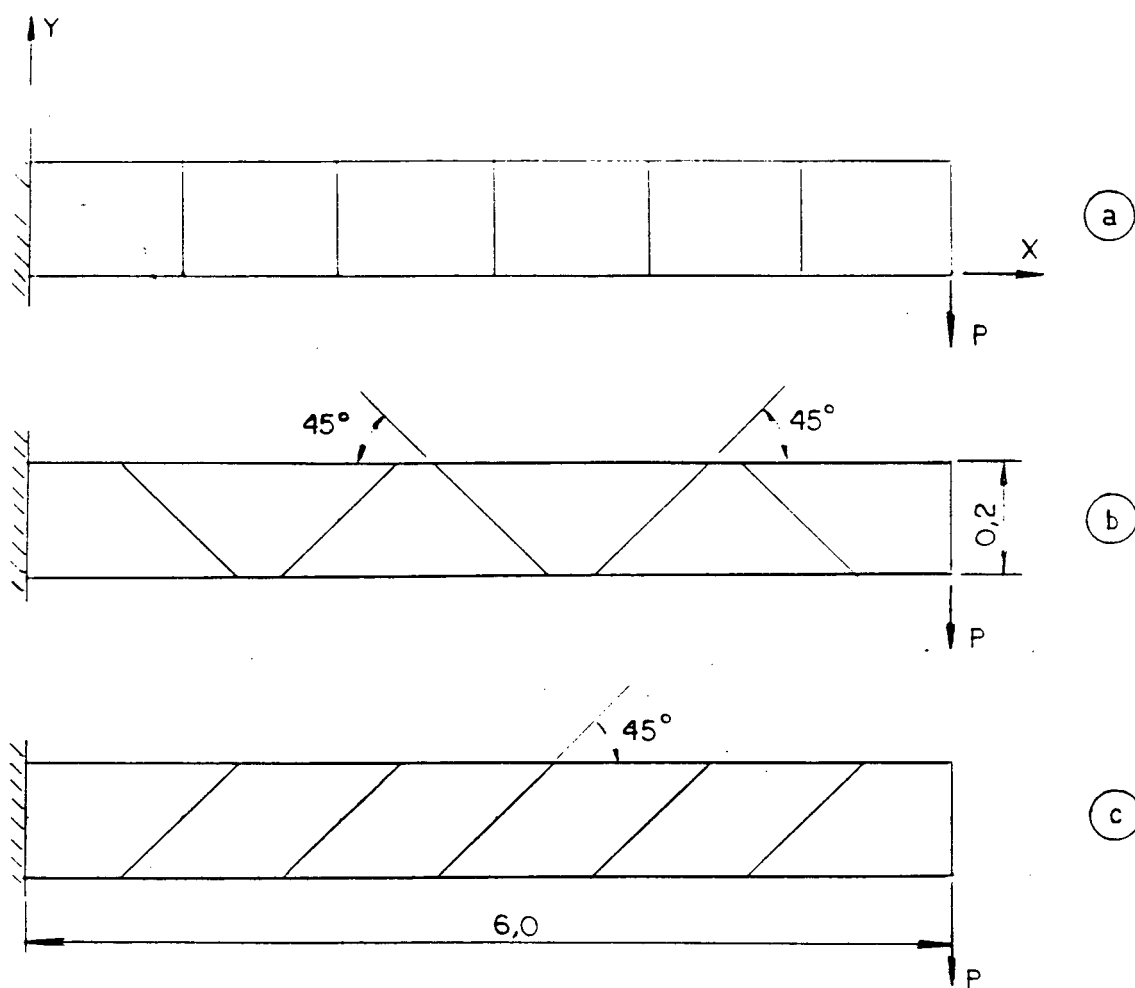
Tal fato motivou a reproduzir os mesmos exemplos, mostrados na Figura 37, onde MacNeal & Harder constataram os problemas de travamento.

Os testes com o presente elemento mostraram resultados semelhantes aos de MacNeal & Harder; ou seja, um erro menor que 10% para a análise com malhas retangulares e erros maiores que 92% com o uso de malhas distorcidas.

5.3. Casos não lineares.

Os problemas não lineares foram resolvidos tanto com o método de Newton Raphson modificado, quanto com o BFGS. Dadas as características de simetria das configurações propostas,

modelou-se apenas um quadrante das estruturas envolvidas.



Comprimento total	= 6,0
Largura	= 0,2
Espessura	= 0,1
Módulo de elasticidade (E)	= $1,0 \times 10^7$
Coefficiente de Poisson (ν)	= 0,3
Força (P)	= 1,0
Número de elementos	= 6
Número de camadas	= 8

Figura 37 - Viga reta.

5.3.1. Placa tracionada.

Inicialmente, procurou-se montar um problema simples para verificar o comentário, contido no Capítulo 2, de que o método BFGS, ao contrário do método Newton-Raphson, não apresenta problemas de convergência, quando ocorre a mudança da fase plástica para a elástica, caracterizada pela trajetória C-D da Figura 38.

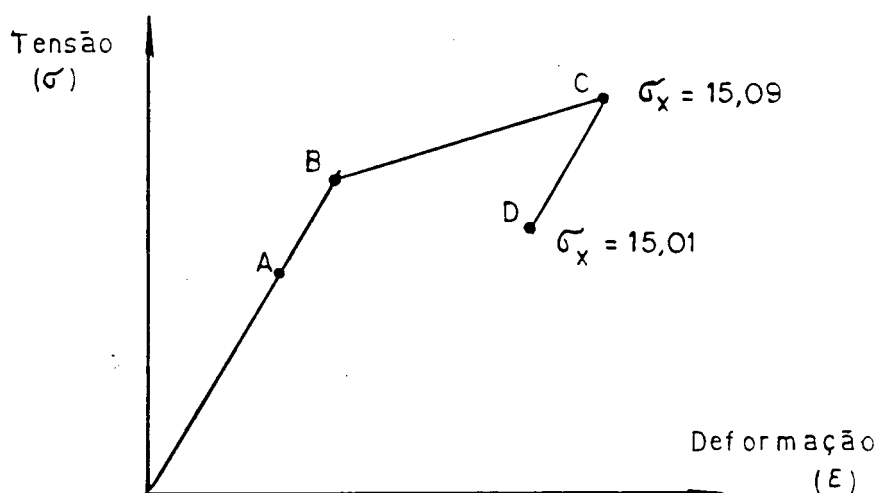


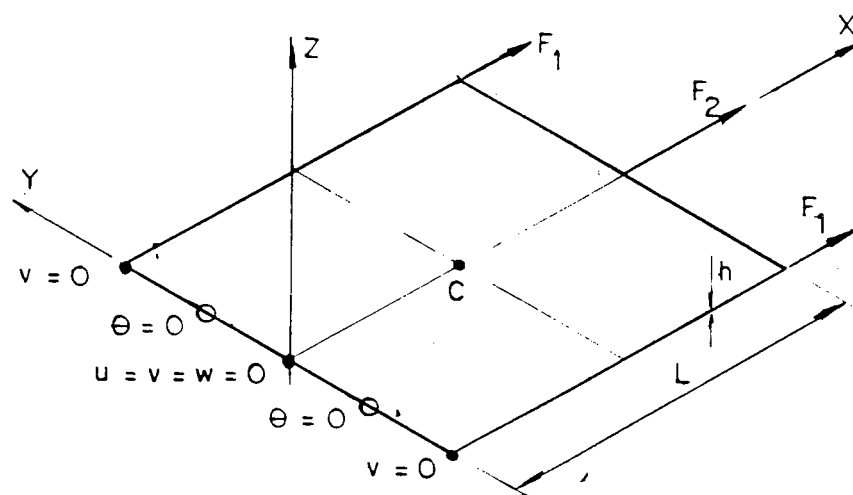
Figura 38 - Curva tensão-deformação.

A verificação foi feita através de um exemplo que simula o estado de tração simples, e consistiu em aplicar forças concentradas de intensidades F_1 e F_2 em uma placa quadrada, conforme mostrado na Figura 39.

Na fase do carregamento elastoplástico, que corresponde ao percurso A-B-C da Figura 38, utilizou-se incrementos de forças com intensidades $0,001 \cdot F_1$ e $0,001 \cdot F_2$. Neste trecho observou-se que ambos os métodos funcionaram bem, sem problemas de convergência.

Adicionalmente constatou-se que o método BFGS exigiu um número bem menor de iterações em relação ao método Newton-Raphson.

A seguir foi imposto o descarregamento elástico, representado pelo percurso C-D da Figura 38, por meio de incrementos negativos de forças com intensidades $-0,001 \cdot F_1$ e $-0,001 \cdot F_2$. Neste trecho, o uso do método de Newton-Raphson modificado apresentou respostas oscilantes, não conseguindo convergir para nenhum valor. Por outro lado, o uso do método BFGS permitiu a obtenção da convergência em poucas iterações.



Largura (L)	=	20,0
Espessura (h)	=	1,0
Parâmetro de encruamento (A)	=	$\frac{d \sigma}{d \epsilon^p} = 2333,3$
Módulo de elasticidade (E)	=	21000,0
Coefficiente de Poisson (ν)	=	0,3
Tensão de escoamento (σ_o)	=	15,0
Forças concentradas: F_1	=	80,0
F_2	=	160,0
Número de camadas em cada elemento	=	8
Malha	=	2 x 2

Figura 39 - Placa quadrada tracionada. Configuração e dados do problema para teste do descarregamento elástico.

5.3.2. Placa quadrada engastada com deformação plástica.

Este exemplo verifica a flexão de uma placa sujeita a deformação plástica com pequenos deslocamentos.

A caracterização do problema está ilustrada na Figura 40. Um quadrante da estrutura foi dividido com malha 6×6 e cada elemento em 12 camadas.

Considerou-se que o material apresenta encruamento isotrópico com o parâmetro de encruamento

$$A = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} = 300,0;$$

definido pela expressão 3.11 do Capítulo 3.

Owen & Figueiras ([24], [25]) abordam o problema por dois caminhos:

a) através do elemento Semiloof ([22], [24]) conjugado ao critério de escoamento de Ilyushin [26], definido em termos de tensões resultantes adimensionalizadas:

$$Q_l + Q_m = 1 \quad (\text{superfície de escoamento de Ilyushin}) \quad (5.8)$$

onde

$$Q_l = n_{11}^2 + n_{22}^2 - n_{11} \cdot n_{22} + 3 \cdot n_{12}^2, \quad (5.9)$$

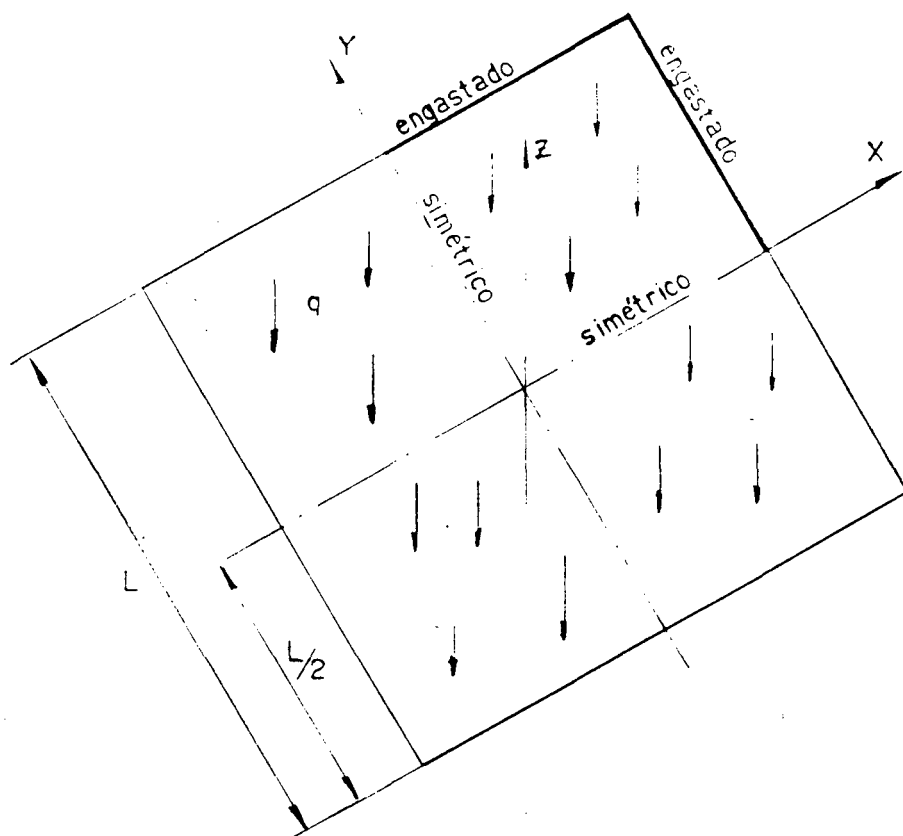
$$Q_m = m_{11}^2 + m_{22}^2 - m_{11} \cdot m_{22} + 3 \cdot m_{12}^2, \quad (5.10)$$

com

$$n_{ij} = \frac{N_i}{N_0} = \frac{\sigma_{ij}^m \cdot h}{\sigma_0 \cdot h}, \quad (5.11)$$

$$m_{ij} = \frac{4}{\sigma_0 \cdot h^2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} z \, dz, \quad (5.12)$$

sendo h a espessura, σ_0 a tensão de escoamento e σ^m a tensão de membrana;



Módulo de elasticidade (E)	=	30000,0
Coefficiente de Poisson (ν)	=	0,3
Parâmetro de encruamento (A)	=	$\frac{d \sigma}{d \epsilon^P} = 300,0$
Tensão de escoamento (σ_0)	=	30,0
Carga distribuída uniforme (q)	=	-0,4
Largura (L)	=	6,0
Número de elementos por quadrante	=	36 (malha 6x6)
Número de camadas em cada elemento	=	12

Figura 40 - Placa quadrada engastada: dados do problema.

b) através do elemento conhecido como Heterosis e is integração por camadas.

Os resultados para o deslocamento do ponto central da

placa estão na Figura 41.

Foram adotados os seguintes incrementos de carga e tolerâncias de convergência:

incrementos	tolerâncias (equações 2.37 e 2.38)
0,4	0,001
0,1	0,001
0,001	0,005
0,001	0,005

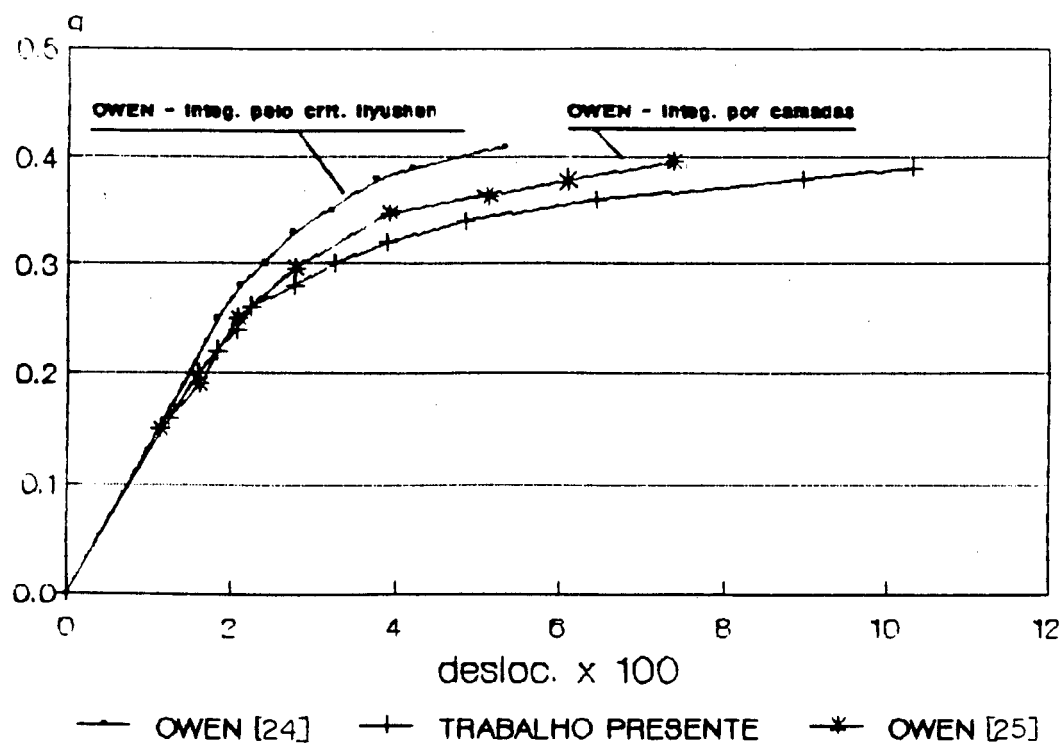


Figura 41 - Placa engastada: resultados

Os resultados dos gráficos da Figura 41 mostram que a integração da relação constitutiva por momentos resultantes e associada ao critério de escoamento de Ilyushin [26] faz prever

uma maior rigidez da estrutura, se comparada com a integração por camadas. Isto pode se explicado pelo que ocorre na integração por momentos resultantes da equação 5.8, pois nela admite-se que a deformação plástica só começa quando toda a espessura atingir o limite de escoamento; enquanto que a integração por camadas permite um percurso progressivo da deformação plástica ao longo da espessura.

A Tabela 3 mostra a comparação entre os resultados do presente trabalho e os da integração por camadas de Owen & Figueiras [25]. Na referida tabela observa-se que o modelamento do trabalho apresenta uma maior rigidez, quando se tem valores elevados da carga distribuída (q).

carga distribuída (q)	Deslocamento vertical no centro da placa		
	Trabalho presente (w)	Owen & Figueiras[25] (w)	Deslocamento normalizado (w/w)
0,16	-0,01236	-0,0123	1,005
0,20	-0,01596	-0,0159	1,003
0,22	-0,01818	-0,0179	1,015
0,24	-0,02061	-0,0200	1,030
0,26	-0,02367	-0,0223	1,061
0,28	-0,02748	-0,0254	1,082
0,30	-0,03240	-0,0279	1,161
0,32	-0,03883	-0,0318	1,221
0,34	-0,04839	-0,0370	1,308
0,36	-0,06430	-0,0439	1,465

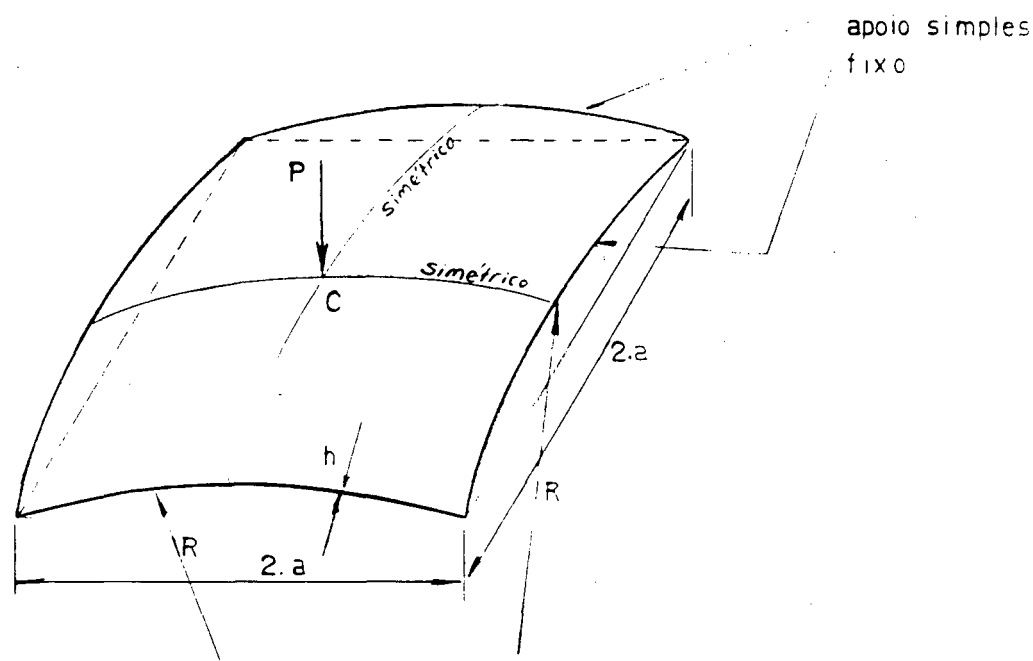
Tabela 3 - Placa engastada: comparações entre os resultados.

Finalmente, foi observado que o método de resolução BFGS requer menor número de iterações em relação ao Newton-Raphson.

5.3.3. Casca esférica puncionada - "snap through".

O objetivo deste exemplo consiste em verificar a formulação para os casos com grandes deslocamentos, mas sem deformação plástica.

A geometria e as condições de contorno estão mostradas na Figura 42. Um quadrante da estrutura foi dividida por uma malha 6×6 , e cada elemento em 12 camadas.



Raio (R)	= 2540,0 mm
Largura (a)	= 784,9 mm
Espessura (h)	= 99,45 mm
Módulo de elasticidade (E)	= 68,95 N/mm ²
Coefficiente de Poisson (ν)	= 0,3
Número de elementos em um quadrante	= 36 (malha 6x6)
Número de camadas por elemento	= 12

Figura 42 - Casca esférica puncionada: dados do problema.

Este problema foi analisado impondo-se incrementos de deslocamentos verticais no ponto central da casca. Devido à configuração, notam-se, inicialmente, aumentos da força nodal em resposta aos incrementos nos deslocamentos. A partir de um determinado instante, o valor da força apresenta uma tendência contrária, de queda. Esse tipo de comportamento é chamado "snap through" ou instabilidade de ponto limite.

O gráfico da Figura 43 mostra os valores da força P , obtidos em resposta aos incrementos sucessivos de deslocamentos verticais, com valores iguais a 8,91 mm, aplicados no centro da casca. Os resultados foram obtidos através do método de Newton-Raphson modificado, fixando-se uma tolerância de 0,005 para os critérios de convergência estabelecidos pelas equações 2.37 e 2.38.

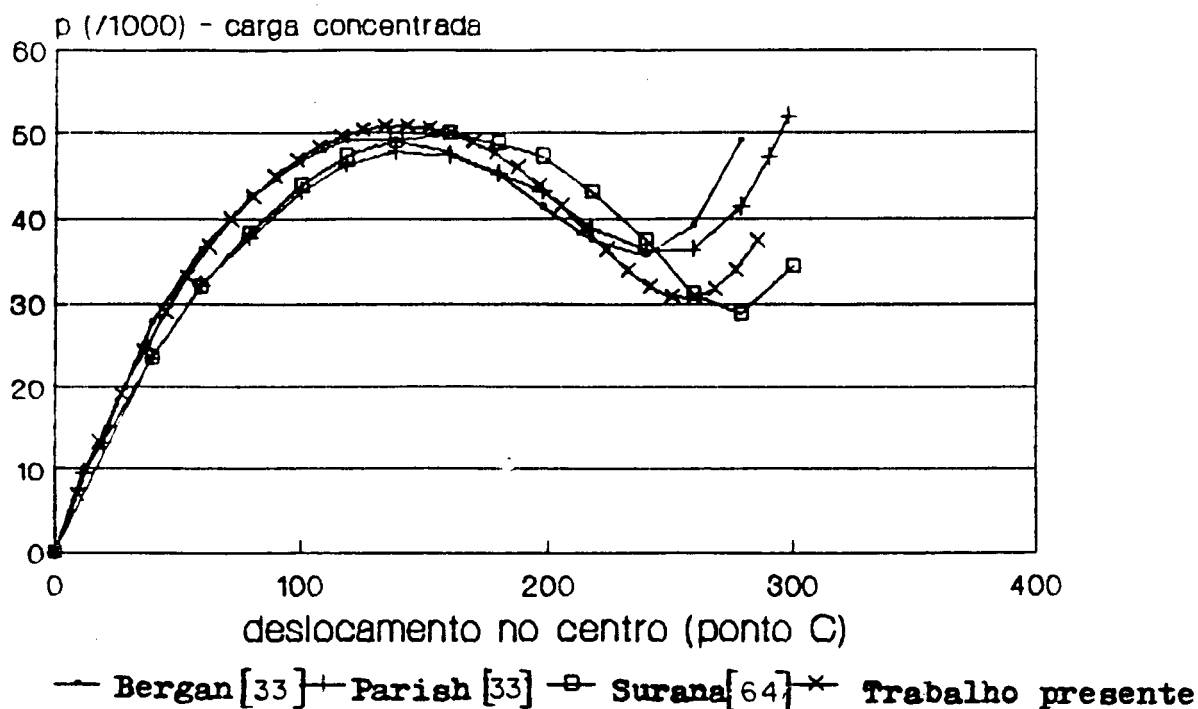


Figura 43 - Casca esférica puncionada: resultados.

O método BFGS, implementado neste trabalho, apresentou falha na convergência quando a estrutura passou pelo "snap through".

Apresentam-se na Tabela 4, as comparações com os trabalhos de Parish [33] e Surana [64], podendo se verificar que os resultados obtidos são bem próximos.

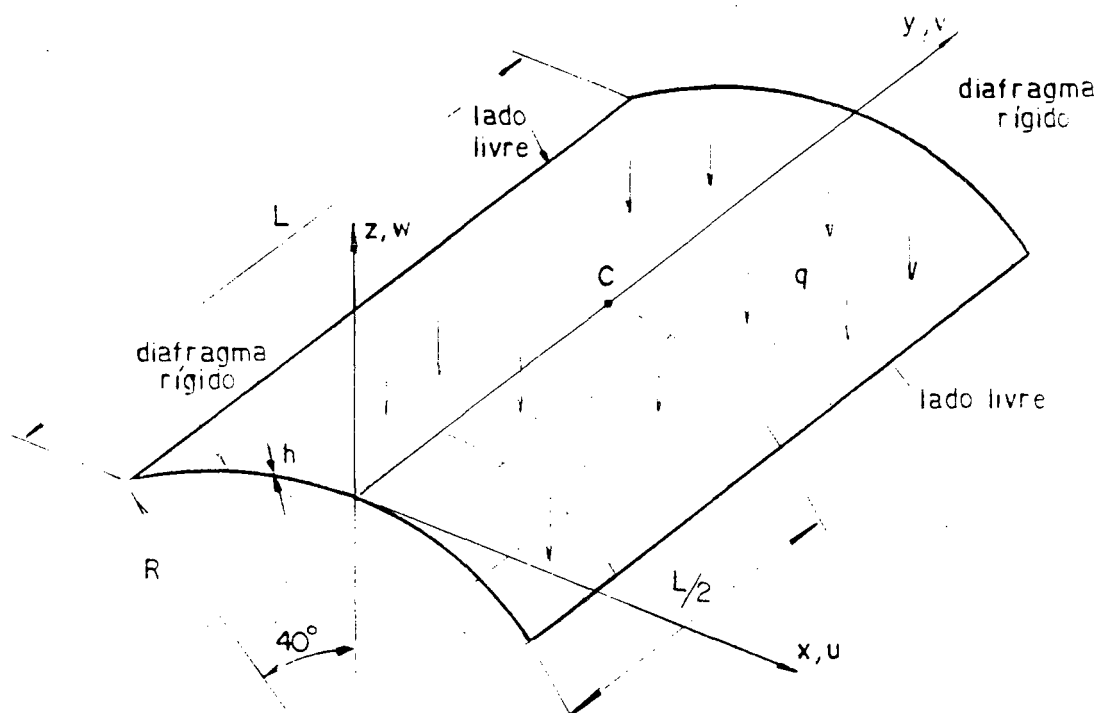
Desloca- mento (w_c)	Carga concentrada			Deslocamento normalizado	
	Trabalho presente ($P/1000$)	Surana [64] ($P_s/1000$)	Parish [33] ($P_p/1000$)	(P/P_p)	(P/P_s)
-8,91	-6,969	-6,693	-7,144	1,04	0,98
-53,46	-33,050	-29,921	-29,821	1,10	1,10
-106,92	-48,384	-45,275	-44,642	1,06	1,08
-142,56	-50,914	-49,603	-48,214	1,03	1,05
-151,47	-50,654	-49,803	-47,857	1,02	1,06
-178,20	-47,684	-48,897	-46,428	0,97	1,03
-213,84	-38,956	-43,779	-40,714	0,89	0,96
-231,66	-33,935	-39,173	-38,035	0,87	0,89
-240,57	-31,998	-36,614	-36,607	0,87	0,87
-249,79	-30,839	-34,252	-36,250	0,90	0,85
-267,30	-31,720	-29,527	-38,036	1,07	0,83
-285,12	-37,344	-30,314	-45,714	1,23	0,82

Tabela 4 - Casca esférica com "snap through": comparações entre os resultados.

5.3.4. Casca cilíndrica com grandes deslocamentos e deformação plástica:

A combinação dos efeitos das não linearidade geométrica e de material é testada neste exemplo, representado na Figura 44.

Um quadrante da casca cilíndrica foi dividida com malha 8×8 e cada elemento possuindo 12 camadas. Foi considerado um material perfeitamente plástico.



Raio (R)	= 7600,0
Espessura (h)	= 76,0
Comprimento (L)	= 15200,0
Módulo de elasticidade (E)	= $2,1 \times 10^4$
Coeficiente de Poisson (ν)	= 0,0
Carga distribuida uniforme (q)	= -0,003 (na direção vertical)
Tensão de escoamento (σ_0)	4,2
Material perfeitamente plástico	

Figura 44 - Casca cilíndrica sob carga uniforme.

Dividiu-se a carga distribuida de valor $q = 3000,0$ em incrementos de $0,15 \cdot q$, para o primeiro, e $0,005 \cdot q$ para os demais.

A tolerância para os critérios de convergência, dados pelas equações 2.37 e 2.38, foi de 0,005.

Tanto o método BFGS quanto o Newton-Raphson modificado não apresentaram problemas de convergência.

A Figura 46 ilustra graficamente os resultados dos deslocamentos verticais no centro da casca. A Tabela 5 mostra a comparação numérica em relação aos resultados de Parish [33]. Nota-se, por esta tabela, que o deslocamento vertical normalizado decresce gradativamente, à medida que se aumenta a carga aplicada na estrutura; no entanto, as diferenças são muito pequenas e permitem afirmar que existe uma excelente aproximação entre os resultados.

carga distribuída ($q \times 10^3$)	deslocamento vertical		deslocamento normalizado (w/\bar{w})
	trabalho presente (w)	Parish [33] (\bar{w})	
0,735	-15,133	-14,07	1,076
0,885	-18,100	-16,99	1,065
1,030	-21,027	-19,90	1,057
1,180	-23,916	-22,33	1,071
1,330	-26,787	-25,24	1,061
1,480	-29,804	-28,64	1,041
1,630	-33,006	-32,04	1,032
1,780	-36,374	-34,95	1,041
1,930	-40,018	-39,32	1,018
2,080	-44,097	-43,23	1,020
2,230	-48,574	-48,06	1,011
2,385	-53,641	-53,88	0,996
2,530	-59,714	-60,68	0,984
2,680	-66,955	-67,96	0,985
2,830	-75,563	-76,21	0,992
2,980	-86,496	-86,89	0,995

Tabela 5 - Comparação entre os resultados do exemplo da casca cilíndrica com grandes deslocamentos e deformação plástica.

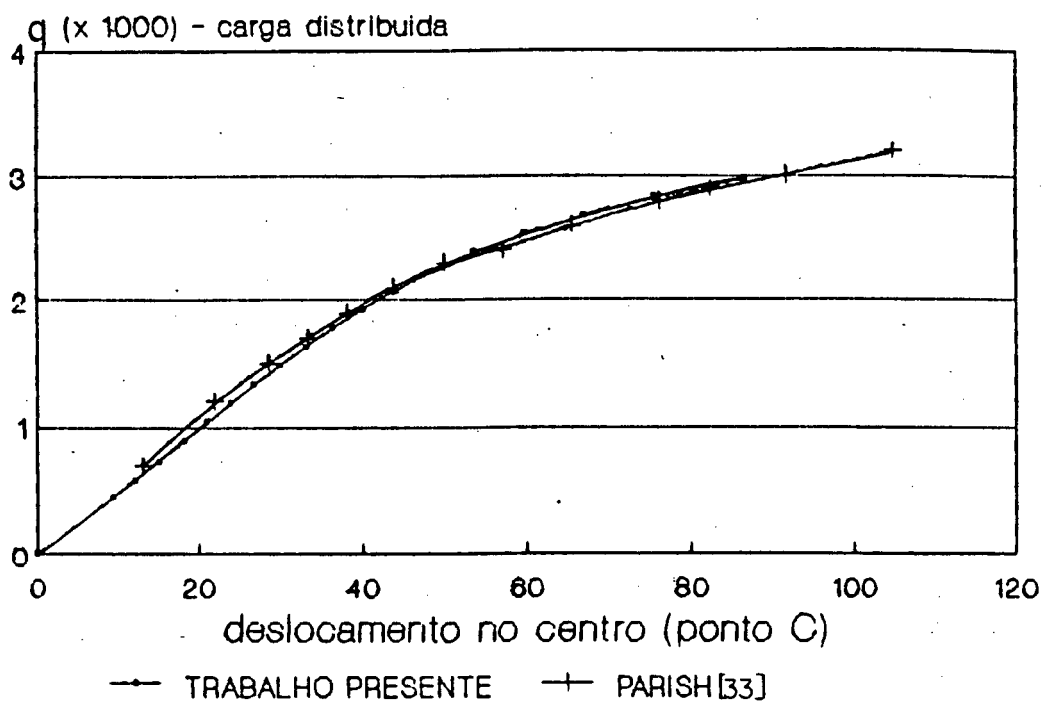


Figura 45 - Casca cilíndrica: resultados.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E SUGESTÕES.

O trabalho escolhido visou implementar ferramentas para análise de processo de desempenho de chapas finas através de método de elementos finitos. As escolhas da formulação, do elemento e da relação constitutiva foram orientados pelos resultados apresentados em trabalhos experimentais, principalmente no que se refere às hipóteses simplificadoras.

A relação constitutiva, nos casos da elastoplasticidade, envolve um grande número de possibilidades, e a adequação depende do tipo de material e do processo de conformação que o mesmo sofre. Aqui foi admitido o modelo clássico de Von Mises associado ao encruamento isotrópico. O efeito Bauschinger, portanto, não foi considerado, apesar do carregamento ser cíclico. Sugere-se para os próximos trabalhos a combinação do encruamento cinemático e isotrópico para abranger tal efeito.

O elemento de casca, aqui implementado, foi submetido aos vários tipos de testes: "patch test", placas, casca cilíndrica e casca esférica submetidos às diversas condições de contorno. Estes reproduziram os bons resultados relatados por Nagtegaal [19] no que se refere aos efeitos de flexão em casos lineares.

No entanto, o exemplo da Figura 37 mostra um caso em que o elemento apresenta problemas de rigidez excessiva para os efeitos de cisalhamento de membrana com a geometria descrita por uma malha distorcida. Uma possibilidade interessante seria a implementação de uma metodologia de refino de malha (re zoning ou remesh) para redefinir a geometria das malhas entre os incrementos, e assim

minimizar essa limitação. Uma outra recomendação oportuna seria a utilização de outros elementos de casca que tivessem apresentado bons resultados em problemas não lineares. Cita-se, por exemplo, o elemento lagrangiano de 9 nós desenvolvido por Mourão ([12],[73]). O mesmo poderá ser incorporado à presente implementação, baseada na formulação de McMeeking & Rice [5], tendo-se apenas o cuidado de modificar a integração da matriz rigidez para o método de integração por camadas.

A análise dos problemas com integração da matriz rigidez por momentos resultantes mostra uma maior rigidez quando o material entra na fase plástica, se comparada com a integração por camadas. A vantagem deste último método consiste na possibilidade de acompanhar melhor o perfil dos estados de tensões e deformações ao longo da espessura. Em contrapartida, a integração por momentos resultantes requer menor esforço computacional, conforme indica o artigo de Parish [33].

O método de Newton-Raphson modificado não apresentou problemas com o "snap through", ao contrário do método conhecido como BFGS, que falhou quanto à convergência. Os dois métodos tiveram comportamento oposto para se lidar com o aumento súbito da matriz rigidez, causado pelo retorno da fase plástica para a elástica do material, pois somente o método BFGS apresentou convergência. Uma alternativa, para superar estas limitações, poderá ser a implementação do método iterativo desenvolvido por Riks e Crisfield ([69] a [72]).

Sugere-se como o próximo passo, para a continuação do trabalho, a implementação de uma formulação para problemas de contato, o que permitirá completar o modelamento do processo de desempenho.

APÊNDICE 01

TRANSFORMAÇÃO DO PRINCÍPIO VARIACIONAL

Neste apêndice, objetiva-se mostrar a obtenção da equação 2.6, partindo-se da equação 2.1.

Tem-se do primeiro membro da equação 2.1 que

$$\int_{V^0} \dot{t}_{ij} \delta \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dV^0 \quad (A.1.1)$$

e, considerando a equação 2.5,

$$\dot{t}_{ij} = \tau_{ij}^* - \sigma_{kj} D_{ki} - \sigma_{ik} D_{kj} + \sigma_{ik} v_{j,k} \quad (A.1.2)$$

tem-se o desenvolvimento da segunda e da terceira parcela do segundo membro acima, dado por

$$\begin{aligned} \sigma_{kj} D_{ki} + \sigma_{ik} D_{kj} &= D_{ki} \sigma_{kj} + \sigma_{ik} D_{kj} \equiv \underline{D}^t \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \underline{D} = \\ &= \underline{D} \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \underline{D}, \end{aligned}$$

pois \underline{D} é simétrico.

Já $\frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ na configuração em $t = \tau$ torna-se

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \bigg|_{t=\tau} = \underline{L}^t \bigg|_{t=\tau}$$

Assim

$$\left(\sigma_{kj} D_{ki} + \sigma_{ik} D_{kj} \right) \delta v_{j,i} \equiv \left(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \right) : \delta \underline{\underline{L}}^t$$

Considerando-se a igualdade

$$\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = \left[\underline{\underline{A}}^t : \underline{\underline{B}} \right] : \underline{\underline{I}} = \left[\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}}^t \right] : \underline{\underline{I}},$$

com $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{B}}$ sendo tensores genéricos de segunda ordem e $\underline{\underline{I}}$ tensor identidade, a expressão anterior equivale a

$$\begin{aligned} \left(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \right) : \delta \underline{\underline{L}}^t &= \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} \cdot \left(\delta \underline{\underline{L}}^t \right)^t : \underline{\underline{I}} + \left(\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \right)^t : \delta \underline{\underline{L}}^t : \underline{\underline{I}} = \\ &= \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} \cdot \delta \underline{\underline{L}} : \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} \cdot \delta \underline{\underline{L}}^t : \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} \cdot \delta \underline{\underline{L}} + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} \cdot \delta \underline{\underline{L}}^t = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} \cdot \delta (\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^t) = \\ &= \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} \cdot \delta (2\underline{\underline{D}}), \end{aligned}$$

mas, por ser

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} : \delta (\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{D}}) &= \underline{\underline{\sigma}} : \left[\delta (\underline{\underline{D}}) \cdot \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}} \cdot \delta (\underline{\underline{D}}) \right] = \underline{\underline{\sigma}}^t : \left[\delta (\underline{\underline{D}}) \cdot \underline{\underline{D}} \right]^t + \underline{\underline{\sigma}} : \left[\underline{\underline{D}} \cdot \delta (\underline{\underline{D}}) \right] = \\ &= \underline{\underline{\sigma}} : \left[\underline{\underline{D}} \cdot \delta (\underline{\underline{D}}) \right] + \underline{\underline{\sigma}} : \left[\underline{\underline{D}} \cdot \delta (\underline{\underline{D}}) \right], \end{aligned}$$

tem-se, finalmente,

$$\left(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \right) : \delta \underline{\underline{L}}^t = \underline{\underline{\sigma}} : \delta (\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{D}}) \quad (\text{A.1.3})$$

A última parcela será assim desenvolvida:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} (\sigma_{ik} v_{j,k}) &\equiv \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{L}}^t : \underline{\underline{L}}^t = \underline{\underline{\sigma}} : \delta \underline{\underline{L}}^t : \underline{\underline{L}} : \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{\sigma}} (\delta \underline{\underline{L}}^t : \underline{\underline{L}}) : \underline{\underline{I}} = \\ &= \underline{\underline{\sigma}} : \delta (\underline{\underline{L}}^t) : \underline{\underline{L}}, \end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned}\underline{\sigma} : \delta(\underline{\underline{L}}^t, \underline{\underline{L}}) &= \underline{\sigma} : [\delta \underline{\underline{L}}^t, \underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^t, \delta \underline{\underline{L}}] = \underline{\sigma} : (\delta \underline{\underline{L}}^t, \underline{\underline{L}}) + \underline{\sigma}^t : [\underline{\underline{L}}^t, \delta \underline{\underline{L}}]^t = \\ &= \underline{\sigma} : (\delta \underline{\underline{L}}^t, \underline{\underline{L}}) + \underline{\sigma} : (\delta \underline{\underline{L}}^t, \underline{\underline{L}}) = 2 \cdot [\underline{\sigma} : (\delta \underline{\underline{L}}^t, \underline{\underline{L}})] ,\end{aligned}$$

logo

$$\sigma_{ij}(\sigma_{ik} v_{j,k}) \equiv \underline{\sigma} : \underline{\underline{L}}^t : \underline{\underline{L}}^t = \underline{\sigma} : \delta(\underline{\underline{L}}^t) : \underline{\underline{L}} = \frac{1}{2} \underline{\sigma} : \delta(\underline{\underline{L}}^t, \underline{\underline{L}}) . \quad (\text{A.1.4})$$

Considerando-se, agora, a multiplicação

$$\begin{aligned}\tau_{ij}^* v_{j,k} &\equiv \underline{\tau}^* : \underline{\underline{L}}^t = \underline{\tau}^* : \left[\frac{1}{2} [\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^t] - \frac{1}{2} [\underline{\underline{L}} - \underline{\underline{L}}^t] \right] = \\ &= \underline{\tau}^* : \underline{\underline{D}} - \underline{\tau}^* : \underline{\underline{W}} ,\end{aligned}$$

com $\underline{\underline{W}} = \frac{1}{2} [\underline{\underline{L}} - \underline{\underline{L}}^t]$. Mas $\underline{\underline{W}}$ é antissimétrico, logo $\underline{\tau}^* : \underline{\underline{W}} = 0$,
assim:

$$\underline{\tau}^* : \underline{\underline{L}}^t = \underline{\tau}^* : \underline{\underline{D}} . \quad (\text{A.1.5})$$

Levando-se em consideração as equações A.1.2 a A.1.5,
conclui-se que

$$\int_{V_0} t_{ij} \delta \left[\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] dV_0 = \int_V \left[\tau_{ij}^* \delta D_{ij} - \frac{1}{2} \sigma_{ij}^* (2 D_{ik} D_{kj} - v_{k,i} v_{k,j}) \right] dV$$

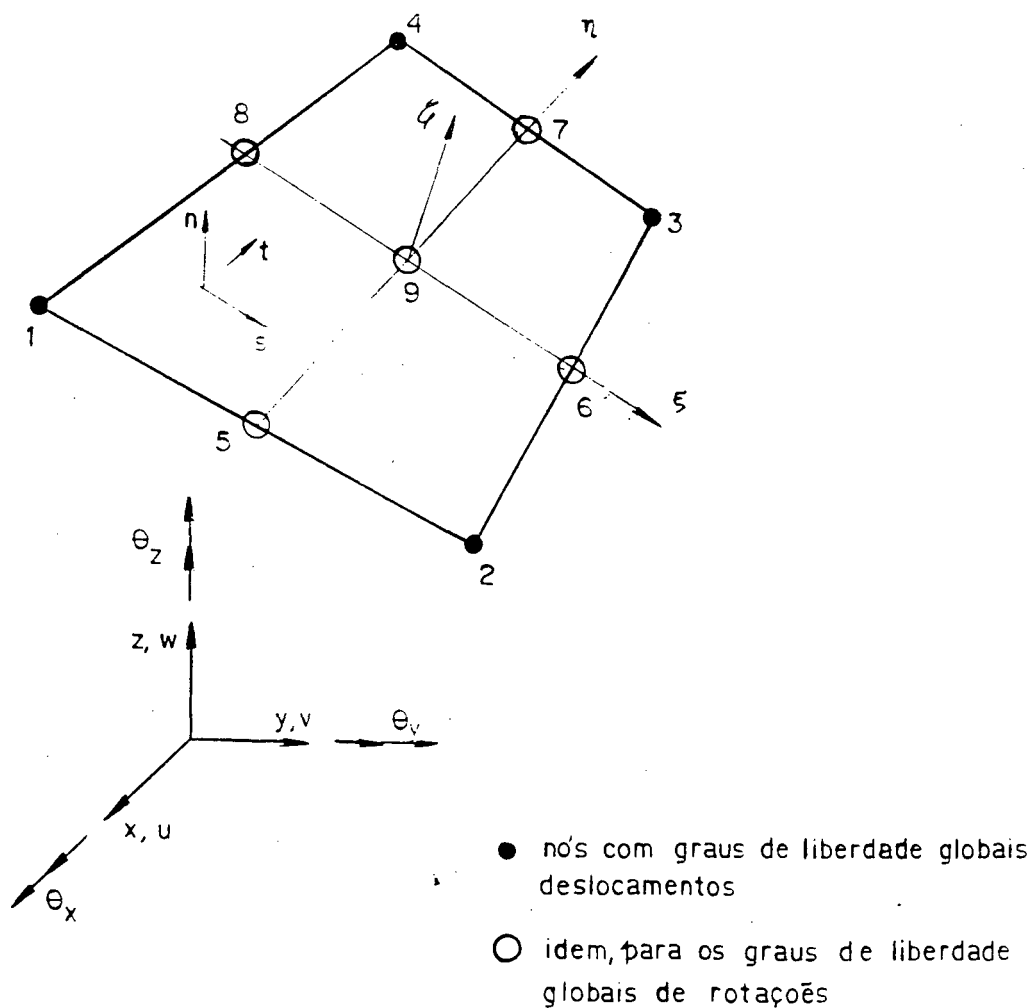
(A.1.6)

APÊNDICE 2

RELAÇÃO ENTRE DEFORMAÇÕES E GRAUS DE LIBERDADE NODAIS

A.2.1: Objetivo.

O detalhamento das equações 4.33, 4.34, 4.35, 4.48, 4.49 e 4.50 do Capítulo 4 será apresentado com base na figura abaixo:



O campo de deslocamentos de uma casca "degenerada" é governado pela restrição de que os vetores unitários η ,

perpendiculares à superfície média, permaneça reto na sua configuração deformada. A expressão deste campo de deslocamentos é dada por [28]

$$u = \phi_i u_{oi} + (\theta_j \times P_j) \psi_j ; \quad (A.2.1)$$

onde:

$$i = 1 \text{ a } 4,$$

$$j = 5 \text{ a } 9,$$

ϕ_i = funções interpolação para o campo de deslocamentos da superfície média de referência,

u_{oi} = graus de liberdade de deslocamento dos nós $i = 1$ a 4 ,

θ_j = graus de liberdade globais de deslocamentos dos nós $j = 5$ a 9 ,

ψ_j = funções interpolações para o campo de rotações,

$$P_j = \zeta \frac{h_j}{2} n_j ,$$

ζ = coordenada natural na direção da espessura,

h_j = espessura.

Para a análise divide-se o campo em parcelas

$$\text{de membrana: } u_o = \phi_i u_{oi}, \quad (A.2.2)$$

e

$$\text{de flexão: } u_f = (\theta_j \times P_j) \psi_j , \quad (A.2.3)$$

em que

$$u = u_o + u_f \quad (A.2.4)$$

A.2.2. Cálculo dos deslocamentos na direções locais \underline{s} e \underline{t} .

O vetor \underline{u}_0 fornece os deslocamentos da superfície de referência nas direções globais x, y, z ; enquanto que as componentes locais são expressas por:

$$\underline{u}_{os} = \phi_i \underline{u}_{oi} \cdot \underline{s} \quad (A.2.5)$$

$$\underline{u}_{ot} = \phi_i \underline{u}_{oi} \cdot \underline{t}$$

Para o cálculo dos deslocamentos \underline{u}_f , utiliza-se, por conveniência, a base local definida por $\underline{s}, \underline{t}, \underline{n}$:

$$\underline{\theta}_j \times \underline{P} = \begin{vmatrix} \underline{s} & \underline{t} & \underline{n} \\ \theta_{sj} & \theta_{tj} & \theta_{nj} \\ 0 & 0 & \zeta \frac{h_j}{2} \end{vmatrix}, \quad (A.2.6)$$

com isso a expressão A.2.3 fica como:

$$\underline{u}_f = \zeta \frac{h_j}{2} [\psi_j \theta_{tj} \underline{s} - \psi_j \theta_{sj} \underline{t}] \quad (A.2.7)$$

Assim os componentes dos deslocamentos serão, na direção \underline{s} :

$$u_{fs} = \underline{u}_f \cdot \underline{s} = \zeta \frac{h_j}{2} \psi_j \theta_{tj},$$

logo:

$$u_{fs} = \left[\zeta \frac{h_j}{2} \psi_j \underline{\theta}_j \right] \cdot \underline{t}, \quad (A.2.8)$$

e, na direção \underline{t} ,

$$u_{ft} = - \zeta \frac{h_j}{2} \psi_j \theta_{sj},$$

logo:

$$u_{fi} = \left[-\zeta \frac{h_j}{2} \psi_j \theta_j \right] \cdot s \quad (\text{A.2.9})$$

A.2.3. Relação deformação/graus de liberdade nodais

Tem-se que:

$$\varepsilon_{ss} = \frac{\partial u_s}{\partial s}, \quad \text{com} \quad u_s = u_{os} + u_{fs} \quad (\text{A.2.10})$$

Usando-se (A.2.5) e (A.2.8) obtém-se:

$$\varepsilon_{ss} = \phi_{i,s} \cdot u_i \cdot s + \zeta \frac{h_j}{2} \psi_{j,s} \cdot t \cdot \theta_j, \quad (\text{A.2.11})$$

ou seja,

$$\varepsilon_{ss} = \varepsilon_{oss} - \zeta \frac{h_j}{2} K_{ss}, \quad (\text{A.2.12})$$

com:

$$\varepsilon_{oss} = \phi_{i,s} \cdot u_i \cdot s, \quad (\text{A.2.13})$$

$$K_{ss} = \psi_{j,s} \cdot t \cdot \theta_j, \quad (\text{A.2.14})$$

os quais correspondem às equações 4.33 e 4.48 do Capítulo 4.

Analogamente:

$$\varepsilon_{tt} = \varepsilon_{ott} - \zeta \frac{h_j}{2} K_{tt}, \quad (\text{A.2.15})$$

com

$$\varepsilon_{ott} = \phi_{i,t} \cdot u_i \cdot t, \quad (\text{A.2.16})$$

$$K_{tt} = \psi_{j,t} \cdot s \cdot \theta_j \quad (\text{A.2.17})$$

e

$$\varepsilon_{st} = \gamma_{ost} - \zeta \frac{h_j}{2} K_{st}, \quad (\text{A.2.18})$$

com

$$\gamma_{ost} = \left[\frac{\partial \phi_i^c}{\partial t} s^c + \frac{\partial \phi_i^c}{\partial s} t^c \right] \cdot u_i, \quad (\text{A.2.19})$$

$$K_{st} = \left[\frac{\partial \psi_j}{\partial s} s - \frac{\partial \psi_j}{\partial t} t \right] \cdot \tilde{\theta}_j \quad (\text{A.2.20})$$

APÊNDICE 3

MATRIZ (B) RELATIVA À RELAÇÃO DEFORMAÇÃO/GRAUS DE LIBERDADE NODAIS

Aqui serão focalizados os procedimentos adotados para a implementação da matriz da relação deformação/graus de liberdade nodais, cujas equações estão no Capítulo 4.

A.3.1. Simbologia.

n → indica os pontos de integração de Gauss,
 c → indica o ponto no centróide do elemento,
 $i = 1, \dots, 4$ → indica o número dos nós pertencentes aos vértices do elemento (Fig. 15, Capítulo 4),
 $j = 5, 6, \dots, 9$ → indica o número dos nós das laterais e do centróide, segundo a Fig. 15

A.3.2. Representação matricial dos graus de liberdade nodais.

Os graus de liberdade, independentes, do elemento são dados por

$$\left\{ d \right\} = \left\{ \begin{matrix} d_u \\ d_\theta \end{matrix} \right\}_{10 \times 1}, \quad (A.3.1)$$

$$\text{com } \left\{ d_u \right\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{Bmatrix}_{12 \times 1} \quad (\text{graus de liberdade de deslocamento}) \quad (\text{A.2.2})$$

$$\left\{ d_\theta \right\} = \begin{Bmatrix} \theta_{s5} \\ \theta_{s6} \\ \theta_{s7} \\ \theta_{s8} \end{Bmatrix}_{4 \times 1} \quad (\text{graus de liberdade de rotação}) \quad (\text{A.3.3})$$

A.3.3. Efeitos de membrana.

O objetivo é obter a matriz B_m :

$$\varepsilon_o \equiv \begin{Bmatrix} \varepsilon_{oss} \\ \varepsilon_{ott} \\ \gamma_{ost} \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} B_m \end{bmatrix}_{3 \times 12} \left\{ d_u \right\}_{12 \times 1}, \quad (\text{A.3.4})$$

valendo-se das expressões 4.33, 4.34 e 4.35.

A primeira linha da matriz acima corresponde à expressão 4.33:

$$\varepsilon_{oss}^n = \frac{\partial \phi_i^n}{\partial s} u_i \circ s^n = \quad (\text{A.3.5})$$

$$= \phi_{1,s}^n s^n \circ u_1 + \phi_{2,s}^n s^n \circ u_2 + \phi_{3,s}^n s^n \circ u_3 + \phi_{4,s}^n s^n \circ u_4,$$

o que se expressa matricialmente como:

$$\varepsilon_{oss}^n = \quad (\text{A.3.6})$$

$$= \left[\phi_{1,s} (s_1 \ s_2 \ s_3) \ \phi_{2,s} (s_1 \ s_2 \ s_3) \ \dots \ \phi_{4,s} (s_1 \ s_2 \ s_3) \right] \left\{ \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{matrix} \right\}$$

Assim tem-se, por exemplo, que:

$$B_m(1,5) = \phi_{2,s} \cdot s_2$$

Os $\phi_{i,s}$ são calculados conforme a expressão 4.29, lembrando que:

$$\phi_{1,\xi} = 0.25 * (\eta - 1), \quad (A.3.7)$$

$$\phi_{2,\xi} = 0.25 * (1 - \eta), \quad (A.3.8)$$

$$\phi_{3,\xi} = 0.25 * (\eta + 1), \quad (A.3.9)$$

$$\phi_{4,\xi} = -0.25 * (\eta + 1), \quad (A.3.10)$$

$$\phi_{1,\eta} = 0.25 * (\xi - 1), \quad (A.3.11)$$

$$\phi_{2,\eta} = -0.25 * (\xi + 1), \quad (A.3.12)$$

$$\phi_{3,\eta} = 0.25 * (\xi + 1), \quad (A.3.13)$$

$$\phi_{4,\eta} = 0.25 * (1 - \xi). \quad (A.3.14)$$

Analogamente tem-se a segunda linha de B_m a partir da expressão 4.34,

$$\varepsilon_{ott} = \frac{\partial \phi_i}{\partial t} u_i \circ t, \quad (\text{A.3.15})$$

ou seja

$$\varepsilon_{ott}^n = \quad (\text{A.3.16})$$

$$= \begin{bmatrix} \phi_{1,t}(t_1 \ t_2 \ t_3) & \phi_{2,t}(t_1 \ t_2 \ t_3) & \dots & \phi_{4,t}(t_1 \ t_2 \ t_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{Bmatrix}$$

Os cálculos dos componentes da terceira linha de B_m (γ_{ost}) são efetuados no centróide e considerados constantes ao longo do elemento, conforme visto no Capítulo 4. Utiliza-se a expressão 4.35:

$$\gamma_{ost}^n = \left[\frac{\partial \phi_i^c}{\partial t} s^c + \frac{\partial \phi_i^c}{\partial s} t^c \right] \circ u_i \quad (\text{A.3.17})$$

A forma matricial da equação acima torna-se

$$\gamma_{ost}^n = \quad (\text{A.3.18})$$

$$= \begin{bmatrix} \phi_{1,t}^c(s_1 \ s_2 \ s_3) & \phi_{2,t}^c(s_1 \ s_2 \ s_3) & \dots & \phi_{4,t}^c(s_1 \ s_2 \ s_3) \\ \phi_{1,s}^c(t_1 \ t_2 \ t_3) & \phi_{2,s}^c(t_1 \ t_2 \ t_3) & \dots & \phi_{4,s}^c(t_1 \ t_2 \ t_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{Bmatrix}$$

A.3.4. Efeitos de flexão.

A matriz objetivada é a seguinte:

$$\tilde{\mathcal{K}} = \begin{Bmatrix} \mathcal{K}_{ss} \\ \mathcal{K}_{tt} \\ \mathcal{K}_{st} \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} B_f \end{bmatrix}_{3 \times 16} \begin{Bmatrix} d \end{Bmatrix}_{16 \times 1} \quad (\text{A.3.19})$$

Cada linha da matriz B_f origina-se, respectivamente, de (equações 4.48, 4.49 e 4.50, Capítulo 4):

$$\mathcal{K}_{ss}^n = \sum_{j=5}^9 - \frac{\partial \psi_j^n}{\partial s} t^n \cdot \theta_j, \quad (\text{A.3.20})$$

$$\mathcal{K}_{tt}^n = \sum_{j=5}^9 \frac{\partial \psi_j^n}{\partial t} s^n \cdot \theta_j, \quad (\text{A.3.21})$$

$$\mathcal{K}_{st}^n = \sum_{j=5}^9 \left[\frac{\partial \psi_j^n}{\partial s} s^n - \frac{\partial \psi_j^n}{\partial t} t^n \right] \cdot \theta_j \quad (\text{A.3.22})$$

Para se chegar aos seus componentes, divide-se o procedimento em várias etapas:

- 1) cálculo dos dados preliminares $\psi_{j,s}$ e $\psi_{j,t}$;
- 2) obtenção das rotações nas direções locais n , e t dos nós $j = 5, \dots, 8$;
- 3) transformação das rotações nodais para as direções globais;
- 4) obtenção das rotações θ_n , θ_t e θ_s no centróide (nó $j = 9$) e posterior transformação para as direções globais;
- 5) cálculo dos componentes de B_f .

1) As derivadas das funções interpolação ψ , representadas pelas expressões 4.38 a 4.42, são calculadas em cada ponto de integração através das expressões abaixo:

$$\psi_{5,\xi} = -0,375 \xi + \bar{e}_s \eta, \quad (\text{A.3.23})$$

$$\psi_{5,\eta} = -0,5 + 1,125 \eta + \bar{e}_5 \xi, \quad (\text{A.3.24})$$

$$\psi_{6,\xi} = 0,5 + 1,125 \xi + \bar{e}_6 \eta, \quad (\text{A.3.25})$$

$$\psi_{6,\eta} = -0,375 \eta + \bar{e}_6 \xi, \quad (\text{A.3.26})$$

$$\psi_{7,\xi} = -0,375 \xi - \bar{e}_5 \eta, \quad (\text{A.3.27})$$

$$\psi_{7,\eta} = 0,5 + 1,125 \eta - \bar{e}_5 \xi, \quad (\text{A.3.28})$$

$$\psi_{8,\xi} = -0,5 + 1,125 \xi - \bar{e}_6 \eta, \quad (\text{A.3.29})$$

$$\psi_{8,\eta} = -0,375 \eta - \bar{e}_6 \xi, \quad (\text{A.3.30})$$

$$\psi_{9,\xi} = -1,5 \xi, \quad (\text{A.3.31})$$

$$\psi_{9,\eta} = -1,5 \eta. \quad (\text{A.3.32})$$

2) A matriz relativa às rotações θ_n , θ_t , e θ_s é originada via equações 4.43 e 4.48.

Da equação 4.43:

$$\theta_t = - \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi_i^j}{\partial s} u_i \cdot n^j = - [\phi_{1,s}^j u_1 \cdot n^j + \dots + \phi_{4,s}^j u_4 \cdot n^j]. \quad (\text{A.3.33})$$

Dai gera-se a seguinte expressão matricial:

$$\theta_t^j = \left[-\phi_{1,s}^j (n_1 \ n_2 \ n_3)^j \dots -\phi_{4,s}^j (n_1 \ n_2 \ n_3)^j \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]_{1 \times 16} \left\{ d \right\}_{16 \times 1} \quad (A.3.34)$$

E, de 4.44,

$$\theta_n = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi_i^j}{\partial s} u_i \cdot t^j = \left[\phi_{1,s}^j u_1 \cdot t^j + \dots + \phi_{4,s}^j u_4 \cdot t^j \right] \quad (A.3.35)$$

Assim

$$\theta_n^j = \left[\phi_{1,s}^j (t_1 \ t_2 \ t_3)^j \dots \phi_{4,s}^j (t_1 \ t_2 \ t_3)^j \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]_{1 \times 16} \left\{ d \right\}_{16 \times 1} \quad (A.3.36)$$

As rotações nodais θ_s^j são graus de liberdade considerados independentes dos campos de deslocamentos:

$$\theta_s^j = \left[\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{array} \right] \left\{ d \right\}_{16 \times 1} \quad (A.3.37)$$

coluna 12 \uparrow

coluna 8+j (j = 5,8) \uparrow

3) Os graus de liberdade acima (para pequenos incrementos de rotação) são determinados como segue:

$$\theta_z^j = \left\{ \begin{array}{c} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{array} \right\}^j = \left[\begin{array}{ccc} t_1 & n_1 & s_1 \\ t_2 & n_2 & s_2 \\ t_3 & n_3 & s_3 \end{array} \right]^j \left\{ \begin{array}{c} \theta_t \\ \theta_n \\ \theta_s \end{array} \right\}^j \quad (A.3.38)$$

cujos componentes (da matriz 3x3) originam-se dos cossenos diretores das bases locais em cada nó j:

$$s^j = \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix}^j, \quad t^j = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix}^j, \quad n^j = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}^j \quad (\text{A.3.39})$$

Das equações A.3.34 a A.3.38 chega-se a

$$\tilde{\theta}^j = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}^j \begin{bmatrix} \theta_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d \end{Bmatrix}_{16 \times 1}, \quad (\text{A.3.40})$$

com

$$\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}^j = \begin{bmatrix} t_1 & n_1 & s_1 \\ t_2 & n_2 & s_2 \\ t_3 & n_3 & s_3 \end{bmatrix}^j \quad (\text{A.3.41})$$

e

$$\begin{bmatrix} \theta_j \end{bmatrix} = \quad (\text{A.3.42})$$

$$= \begin{bmatrix} -\phi_{1,s}^j(n_1 \ n_2 \ n_3)^j \dots -\phi_{4,s}^j(n_1 \ n_2 \ n_3)^j & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \phi_{1,s}^j(t_1 \ t_2 \ t_3)^j \dots \phi_{4,s}^j(t_1 \ t_2 \ t_3)^j & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 16}$$

coluna 12 \uparrow
coluna $8+j$ ($j = 5, 8$) \uparrow

Então a cada nó $j = 5, \dots, 8$ tem-se as correspondentes matrizes $\theta_5, \theta_6, \theta_7$ e θ_8 .

4) As rotações no centróide (nó 9) são calculadas com o auxílio das expressões 4.45, 4.46 e 4.47 do Capítulo 4.

De 4.45:

$$\tilde{\theta}_9 \cdot s = -\frac{1}{4} (3 \tilde{\theta}_6 + 3 \tilde{\theta}_8 - \tilde{\theta}_5 - \tilde{\theta}_7) \cdot s,$$

e da equação A.3.42, acima, chega-se a

$$\theta_s^p = [\theta_{s9}] \left\{ d \right\}, \quad (\text{A.3.43})$$

com

$$[\theta_{s9}] = \frac{1}{4} \underset{(1 \times 16)}{[s_1 \ s_2 \ s_3]} \cdot \underset{(1 \times 2)}{\left[3[\theta_6] + 3[\theta_8] - [\theta_5] - [\theta_7] \right]} \underset{(2 \times 16)}{1} \quad (\text{A.3.44})$$

De 4.46:

$$\theta_t^p = \theta_p \cdot t^c = \frac{1}{4} (3\theta_5 + 3\theta_7 - \theta_6 - \theta_8) \cdot t^c,$$

e da equação A.3.42:

$$\theta_t^p = [\theta_{t9}] \left\{ d \right\}, \quad (\text{A.3.45})$$

com

$$[\theta_{t9}] = \frac{1}{4} \underset{(1 \times 16)}{[t_1 \ t_2 \ t_3]} \cdot \underset{(1 \times 2)}{\left[3[\theta_5] + 3[\theta_7] - [\theta_6] - [\theta_8] \right]} \underset{(2 \times 16)}{1} \quad (\text{A.3.46})$$

Da equação 4.39:

$$\theta_p \cdot n^c = \frac{1}{4} (\theta_5 + \theta_6 + \theta_7 + \theta_8) \cdot n^c,$$

e da equação A.3.42, tem-se

$$\theta_n^p = [\theta_{n9}] \left\{ d \right\}, \quad (\text{A.3.47})$$

com

$$[\theta_{n9}] = \frac{1}{4} [n_1 \ n_2 \ n_3] \cdot \left([\theta_5] + [\theta_6] + [\theta_7] + [\theta_8] \right)$$

(1×16) (1×3) (3×16)

(A.3.48)

A matriz de θ_9 nas direcções globais (para pequenas rotações) será dada por:

$$\theta_9 = [T] \begin{Bmatrix} \theta_t \\ \theta_n \\ \theta_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & n_1 & s_1 \\ t_2 & n_2 & s_2 \\ t_3 & n_3 & s_3 \end{bmatrix}^{(c)} \begin{Bmatrix} \theta_t \\ \theta_n \\ \theta_s \end{Bmatrix} \quad (A.3.49)$$

Ou seja,

$$\theta_9 = \begin{bmatrix} t_1 & n_1 & s_1 \\ t_2 & n_2 & s_2 \\ t_3 & n_3 & s_3 \end{bmatrix}^{(c)} \begin{bmatrix} \dots \theta_{t9} \dots \\ \dots \theta_{n9} \dots \\ \dots \theta_{s9} \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d \end{Bmatrix}, \quad (A.3.50)$$

(3×3) (3×16)

$$\theta_9 = [\theta_9] \begin{Bmatrix} d \end{Bmatrix} \quad (A.3.51)$$

Cada linha da matriz 3×16 , acima, é montada com os elementos das matrizes obtidas em A.3.44, A.3.46 e A.3.48.

5) O cálculo da matriz B_f (equação A.3.19) se faz a seguir.

A primeira linha desta matriz se determina a partir da equação A.3.20 (aqui em forma matricial):

$$\mathcal{K}_{ss}^n = - \left[\psi_{5,s}^n(t_1 \ t_2 \ t_3) \begin{Bmatrix} \theta_5 \end{Bmatrix} + \psi_{6,s}^n(t_1 \ t_2 \ t_3) \begin{Bmatrix} \theta_6 \end{Bmatrix} + \dots + \psi_{9,s}^n(t_1 \ t_2 \ t_3) \begin{Bmatrix} \theta_9 \end{Bmatrix} \right] \quad (\text{A.3.52})$$

Usando as equações A.3.42 e A.3.50, tem-se:

$$\mathcal{K}_{ss}^n = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d \end{Bmatrix}, \quad \begin{matrix} (1 \times 16) & (16 \times 1) \end{matrix} \quad (\text{A.3.53})$$

em que

$$\begin{bmatrix} \mathcal{K}_{ss} \end{bmatrix} = - \psi_{5,s}^n(t_1 \ t_2 \ t_3) \begin{bmatrix} \theta_5 \end{bmatrix} - \dots - \psi_{9,s}^n(t_1 \ t_2 \ t_3) \begin{bmatrix} \theta_9 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (1 \times 2) & (2 \times 1) & (1 \times 2) & (2 \times 1) \end{matrix} \quad (\text{A.3.52})$$

Seguindo os mesmos passos determinam-se \mathcal{K}_{tt} e \mathcal{K}_{st} , que correspondem às segunda e terceira linhas de B_f :

$$\mathcal{K}_{tt}^n = \left[\psi_{5,t}^n(s_1 \ s_2 \ s_3) \begin{Bmatrix} \theta_5 \end{Bmatrix} + \psi_{6,t}^n(s_1 \ s_2 \ s_3) \begin{Bmatrix} \theta_6 \end{Bmatrix} + \dots + \psi_{9,t}^n(s_1 \ s_2 \ s_3) \begin{Bmatrix} \theta_9 \end{Bmatrix} \right] \quad (\text{A.3.55})$$

ou seja,

$$\mathcal{K}_{tt}^n = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{tt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d \end{Bmatrix}, \quad \begin{matrix} (1 \times 16) & (16 \times 1) \end{matrix} \quad (\text{A.3.56})$$

em que

$$\begin{bmatrix} \mathcal{K}_{tt} \end{bmatrix} = \underbrace{\psi_{s,s}}_{(1 \times 3)} \underbrace{(s_1 \ s_2 \ s_3)}_{(3 \times 16)} \begin{bmatrix} \theta_5 \end{bmatrix}_{(3 \times 16)} + \dots + \underbrace{\psi_{\theta,s}}_{(1 \times 3)} \underbrace{(s_1 \ s_2 \ s_3)}_{(3 \times 16)} \begin{bmatrix} \theta_9 \end{bmatrix}_{(3 \times 16)}; \quad (A.3.57)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{st}^n &= \left[\underbrace{\psi_{s,s}^n}_{(1 \times 3)} \underbrace{(s_1 \ s_2 \ s_3)^n}_{(3 \times 16)} - \underbrace{\psi_{s,t}^n}_{(1 \times 3)} \underbrace{(t_1 \ t_2 \ t_3)}_{(3 \times 16)} \right] \begin{Bmatrix} \theta_5 \end{Bmatrix} + \\ &+ \left[\underbrace{\psi_{\theta,s}^n}_{(1 \times 3)} \underbrace{(s_1 \ s_2 \ s_3)^n}_{(3 \times 16)} - \underbrace{\psi_{\theta,t}^n}_{(1 \times 3)} \underbrace{(t_1 \ t_2 \ t_3)}_{(3 \times 16)} \right] \begin{Bmatrix} \theta_9 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (A.3.58)$$

ou melhor,

$$\mathcal{K}_{st}^n = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{K}_{st} \end{bmatrix}}_{(1 \times 16)} \underbrace{\begin{Bmatrix} d \end{Bmatrix}}_{(16 \times 1)}, \quad (A.3.59)$$

com

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{st} \end{bmatrix} &= \left[\underbrace{\psi_{s,s}^n}_{(1 \times 3)} \underbrace{(s_1 \ s_2 \ s_3)^n}_{(3 \times 16)} - \underbrace{\psi_{s,t}^n}_{(1 \times 3)} \underbrace{(t_1 \ t_2 \ t_3)}_{(3 \times 16)} \right] \begin{bmatrix} \theta_5 \end{bmatrix}_{(3 \times 16)} + \dots \\ &+ \left[\underbrace{\psi_{\theta,s}^n}_{(1 \times 3)} \underbrace{(s_1 \ s_2 \ s_3)^n}_{(3 \times 16)} - \underbrace{\psi_{\theta,t}^n}_{(1 \times 3)} \underbrace{(t_1 \ t_2 \ t_3)}_{(3 \times 16)} \right] \begin{bmatrix} \theta_9 \end{bmatrix}_{(3 \times 16)}. \end{aligned} \quad (A.3.60)$$

A.3.5. Efeito combinado de membrana e flexão.

A interação entre ambos os efeitos é representada na expressão abaixo:

$$\left\{ \tilde{\varepsilon} \right\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{ss} \\ \varepsilon_{tt} \\ \gamma_{st} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{oss} - \zeta \frac{h}{2} \kappa_{ss} \\ \varepsilon_{ott} - \zeta \frac{h}{2} \kappa_{tt} \\ \gamma_{ost} - \zeta \frac{h}{2} \kappa_{st} \end{Bmatrix} = \left\{ \tilde{\varepsilon}_0 - z \cdot \tilde{\kappa} \right\}, \quad (\text{A.3.61})$$

com $z = \zeta \frac{h}{2}$, $-1 \leq \zeta \leq 1$

(a cota z é medida segundo a direção local perpendicular à superfície média).

De (A.3.4) e (A.3.19) a equação (A.3.61) transforma-se em:

$$\left\{ \tilde{\varepsilon} \right\} = \begin{bmatrix} B_m \end{bmatrix} \left\{ d_u \right\} - z \begin{bmatrix} B_f \end{bmatrix} \left\{ d \right\} = \quad (\text{A.3.62})$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{B}_m \end{bmatrix} \left\{ d \right\} - z \begin{bmatrix} B_f \end{bmatrix} \left\{ d \right\} = \begin{bmatrix} \bar{B}_m - z B_f \end{bmatrix} \left\{ d \right\},$$

$$\left\{ \varepsilon \right\} = \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \left\{ d \right\}, \quad (\text{A.3.63})$$

em que

$$\begin{bmatrix} \bar{B}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_m & | & 0 \\ (3 \times 12) & (3 \times 4) \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.64})$$

$$\begin{bmatrix} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{B}_m - z B_f \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.65})$$

A.3.6. Obtenção da matriz rigidez linear.

A seguir mostra-se a manipulação de B para a obtenção da matriz rigidez linear.

Partindo-se da equação 2.12 do Capítulo 2 e com a aplicação da expressão A.3.65, tem-se:

$$\begin{aligned}
 [K] &= \int_V [B]^T [C] [B] dV = \\
 &= \int_V \left[\bar{B}_m - z B_f \right]^T [C] \left[\bar{B}_m - z B_f \right] dV,
 \end{aligned}$$

ou melhor,

$$\begin{aligned}
 [K] &= \int_V \left[\left[\bar{B}_m \right]^T [C] \left[\bar{B}_m \right] - z \left[B_f \right]^T [C] \left[\bar{B}_m \right] + \right. \\
 &\quad \left. - z \left[B_m \right]^T [C] \left[\bar{B}_f \right] + z^2 \left[B_f \right]^T [C] \left[\bar{B}_f \right] \right] dV. \quad (A.3.66)
 \end{aligned}$$

Analisando-se cada parcela separadamente, tem-se:

$$a) \int_V \left[\bar{B}_m \right]^T [C] \left[\bar{B}_m \right] dV = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-h/2}^{+h/2} \left[\bar{B}_m \right]^T [C] \left[\bar{B}_m \right] dz d\xi d\eta \det J$$

Como foi visto no Capítulo 4, faz-se a integração por camadas na direção perpendicular à superfície média da casca:

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \left[\bar{B}_m \right]^T [C] \left[\bar{B}_m \right] dz = \left[\bar{B}_m \right]^T [C_m] \left[\bar{B}_m \right], \quad (A.3.67)$$

com

$$[C_m] = \int_{-h/2}^{+h/2} [C] dz. \quad (A.3.68)$$

Assim:

$$\int \left[\bar{B}_m \right]^T [C] \left[\bar{B}_m \right] dV = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[\bar{B}_m \right]^T [C_m] \left[\bar{B}_m \right] d\xi d\eta \det J. \quad (A.3.69)$$

Como a matriz \bar{B}_m tem muitos componentes nulos, convém retomar-se a equação A.3.64:

$$\begin{aligned}
 [\bar{B}_m]^T [C_m] [\bar{B}_m] &= \begin{bmatrix} [B_m]^T_{12 \times 3} \\ [\emptyset]_{4 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [C_m]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [B_m]_{(3 \times 12)} \\ [\emptyset]_{(3 \times 4)} \end{bmatrix}, \\
 [\bar{B}_m]^T [C_m] [\bar{B}_m] &= \begin{bmatrix} [[B_m]^T [C_m] [B_m]]_{12 \times 12} & [\emptyset]_{12 \times 4} \\ [\emptyset]_{4 \times 12} & [\emptyset]_{4 \times 4} \end{bmatrix} \quad (A.3.70)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad \int_V \left[-z [B_f]^T [C] [\bar{B}_m] - z [B_m]^T [C] [\bar{B}_f] \right] dV &= \\
 = - \int_V z \left[[B_f]^T [C] [\bar{B}_m] + \left[[B_f]^T [C] [\bar{B}_m] \right]^T \right] dV &= \\
 = - \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[[B_f]^T [C_{fm}] [\bar{B}_m] + \left[[B_f]^T [C_{fm}] [\bar{B}_m] \right]^T \right] d\xi \, d\eta \, \det J, & \\
 & \quad (A.3.71)
 \end{aligned}$$

com:

$$[C_{fm}] = \int_{-h/2}^{+h/2} z [C] dz. \quad (A.3.72)$$

Mais uma vez pode-se explorar a presença de muitos componentes nulos em \bar{B}_m (equação A.3.64) nas operações matriciais presentes em (A.3.70):

$$\begin{aligned}
 [B_f]^T [C_{fm}] [\bar{B}_m] &= [B_f]^T [C_{fm}] \left[[B_m] \mid [\emptyset] \right] = \\
 &= \left[\begin{array}{cc} B_f & E_{fm} \end{array} \right] \left[[B_m] \mid [\emptyset] \right], \\
 &\quad 16 \times 2 \quad 2 \times 2 \quad 2 \times 12 \quad 2 \times 4 \\
 &\quad 16 \times 2 \quad 2 \times 16
 \end{aligned}$$

assim:

$$\begin{aligned}
 [B_f]^T [C_{fm}] [\bar{B}_m] &= \left[\begin{array}{cc} B_f & E_{fm} \end{array} \mid B_m \right] \left[\begin{array}{c} \emptyset \\ \emptyset \end{array} \right] \\
 &\quad 16 \times 12 \quad 16 \times 4 \quad (16 \times 16) \\
 &\quad (A.3.73)
 \end{aligned}$$

c)

$$\int_V z^2 [B_f]^T [C] [\bar{B}_f] dV = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[[B_f]^T [C_f] [B_f] \right] d\xi d\eta \det J,$$

(A.3.74)

com:

$$[C_f] = \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 [C] dz.$$

(A.3.75)

APÊNDICE 4

IMPLEMENTAÇÃO DA MATRIZ RIGIDEZ.

A matriz rigidez do elemento é dividida em seus componentes K e K_g , conforme visto no Capítulo 2. Aqui serão consideradas as particularidades para o uso do presente elemento de casca com integração em camadas.

A.4.1. Matriz rigidez linear K .

A matriz rigidez linear K da equação 2.12 é dada por

$$[K] = \int_V [B]^T [C] [B] dV. \quad (A.4.1)$$

A matriz engloba a soma dos efeitos de membrana e de flexão. As grandezas são, segundo as bases locais (com direções s, t, n) vistas no Capítulo 4:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{ss} \\ \epsilon_{tt} \\ \gamma_{st} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{ss} \\ \epsilon_{tt} \\ \gamma_{st} \end{Bmatrix}^m - z \cdot \begin{Bmatrix} \kappa_{ss} \\ \kappa_{tt} \\ \kappa_{st} \end{Bmatrix}^f = \left[B_m - z B_f \right] \left\{ d \right\}, \quad (A.4.2)$$

onde: o índice m representa o efeito de membrana e f , o de flexão,

z é a distância do ponto à superfície média da casca.

As linhas da matriz B_m são obtidas através das equações 4.33, 4.34 e 4.35; as da B_f pelas expressões 4.48, 4.49 e 4.50.

A substituição de (A.4.2) em (A.4.1) resulta na matriz

rigidez:

$$K = \int_A \int_{\bar{z}} \left[B_m^T C B_m - \bar{z} \left(B_f^T C B_m + [B_f^T C B_m]^T \right) + \bar{z}^2 B_f^T C B_f \right] d\bar{z} dA. \quad (A.4.3)$$

A integração segundo a direção normal \bar{z} é efetuada em camadas.

Somente a relação constitutiva C depende da cota z , tendo-se:

$$\int_{\bar{z}} C d\bar{z} = \int_{-e/2}^{+e/2} C(\bar{z}) d\bar{z} = \sum_{l=1}^m C(\bar{z}_l) \Delta\bar{z} = C_m, \quad (A.4.4)$$

$$\int_{\bar{z}} \bar{z} C d\bar{z} = \int_{-e/2}^{+e/2} \bar{z} C(\bar{z}) d\bar{z} = \sum_{l=1}^m \bar{z}_l C(\bar{z}_l) \Delta\bar{z} = C_{fm}, \quad (A.4.5)$$

$$\int_{\bar{z}} \bar{z}^2 C d\bar{z} = \int_{-e/2}^{+e/2} \bar{z}^2 C(\bar{z}) d\bar{z} = \sum_{l=1}^m \bar{z}_l^2 C(\bar{z}_l) \Delta\bar{z} = C_f, \quad (A.4.6)$$

com

$$\Delta\bar{z} = \frac{e}{m}, \quad e = \text{espessura}, \quad m = \text{número de camadas}.$$

A integração na superfície A se faz por quadratura de Gauss (2×2).

A.4.2 Matriz rigidez da tensão inicial (K_s).

Para efeito de apresentação subdivide-se a expressão 2.14 dada por

$$[K_s] = \int_V \left([N_k]^T \sigma_{ij} [N_k]_{,j} - 2[B_{ki}]^T \sigma_{ij} [B_{kj}] \right) dV, \quad (A.4.7)$$

em duas partes, K_{s1} e K_{s2} , de sorte que

$$[K_{s1}] = \int_V \left([N_k]_{,i}^T \sigma_{ij} [N_k]_{,j} \right) dV, \quad (A.4.8)$$

e

$$[K_{s2}] = \int_V \left(-2 [B_{ki}]^T \sigma_{ij} [B_{kj}] \right) dV. \quad (A.4.9)$$

A particularização para o elemento do presente trabalho leva em consideração que as tensões σ_{12} , σ_{22} e σ_{33} são aproximadamente nulas. Ou seja, faz-se necessário conseguir apenas as matrizes

$$[N_k]_{,l}, \quad \text{com } k = 1, 2, 3 \\ l = 1, 2, \quad (A.4.10)$$

para sua aplicação na equação A.4.8 (as demais matrizes são anuladas por um dos σ_{ka}).

Estas são geradas à medida que se implementa a matriz **B** (Apêndice 3), pois foi definido em (2.9) que

$$[B_{ij}] = \frac{1}{2} [N_i]_{,j} + \frac{1}{2} [N_j]_{,i}, \quad \begin{matrix} i = 1, 2 \\ j = 1, 2 \end{matrix} \quad (A.4.11)$$

Contudo, duas matrizes precisam ser calculados à parte,

$$[N_3]_{,1} \quad \text{e} \quad [N_3]_{,2},$$

pois estas não são utilizadas no cálculo de **B** (corresponderiam aos cisalhamentos transversais nulos). Elas representam, respectivamente, as rotações $(-\theta_2)$ e (θ_1) :

$$-\theta_2 = [N_3]_{,1} \{d\}, \quad (A.4.12)$$

$$\theta_1 = [N_3]_{,2} \{d\}, \quad (A.4.13)$$

d = graus de liberdade nodais.

Ainda,

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \theta_5 \end{bmatrix} \psi_5 + \begin{bmatrix} \theta_6 \end{bmatrix} \psi_6 + \dots + \begin{bmatrix} \theta_9 \end{bmatrix} \psi_9 \right) \begin{Bmatrix} d \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.4.14})$$

com $\theta_5, \theta_6, \dots, \theta_9$, calculados segundo o Apêndice 3.

Uma vez conseguidos os $[N_i]_j$, agrupa-se estas matrizes-linha em B_{NL1} :

$$[B_{NL1}] = \begin{bmatrix} \dots [N_1]_{,1} \dots \\ \dots [N_1]_{,2} \dots \\ \dots [N_2]_{,1} \dots \\ \dots [N_2]_{,2} \dots \\ \dots [N_3]_{,1} \dots \\ \dots [N_3]_{,2} \dots \end{bmatrix}_{6 \times 16} \quad (\text{A.4.15})$$

de tal forma que o integrando de (A.4.8) seja:

$$\bar{K}_{S1} = [B_{NL1}]^T \begin{bmatrix} \sigma_{2 \times 2} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{2 \times 2} \end{bmatrix} [B_{NL1}], \quad (\text{A.4.16})$$

$$\text{com} \quad \sigma_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4.17})$$

Na implementação da matriz K_{s2} , equação A.4.9, usam-se diretamente as linhas da matriz B,

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{22} \\ 1/2 \cdot B_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d \end{Bmatrix},$$

com exceção da terceira linha, na qual se toma $1/2 \cdot B_{12}$ ao invés de

B_{12} , pois na parcela linear (equações A.4.1 e A.4.2) da matriz rigidez se utiliza o cisalhamento γ_{12} , que é o dobro de ϵ_{12} .

Apresenta-se, a seguir, a matriz B_{NL2} :

$$[B_{NL2}] = \begin{bmatrix} B_{11} \\ 1/2 B_{12} \\ 1/2 B_{12} \\ B_{22} \end{bmatrix} \quad (A.4.18)$$

de tal forma que o integrando da equação A.4.9 seja equivalente a

$$\bar{K}_{S2} = [B_{NL2}]^T \begin{bmatrix} \sigma_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & \sigma_{2 \times 2} \end{bmatrix} [B_{NL2}] \quad (A.4.19)$$

De maneira similar à equação (A.4.3), B_{NL1} e B_{NL2} são considerados como a soma dos efeitos de membrana e de flexão.

A integração na direção normal z , feita em camadas, dá origem às matrizes σ_m , σ_{fm} e σ_f :

$$\int_z \sigma dz = \int_{-e/2}^{+e/2} \sigma(z) dz = \sum_{l=1}^m \sigma(z_l) \Delta z = \sigma_m \quad (A.4.20)$$

$$\int_z z \sigma dz = \int_{-e/2}^{+e/2} z \sigma(z) dz = \sum_{l=1}^m z \sigma(z_l) \Delta z = \sigma_{fm} \quad (A.4.21)$$

$$\int_z z^2 \sigma dz = \int_{-e/2}^{+e/2} z^2 \sigma(z) dz = \sum_{l=1}^m z^2 \sigma(z_l) \Delta z = \sigma_f \quad (A.4.22)$$

com σ fornecido pela equação A.4.17.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] NAGTEGAAL, J.C. & REBELO, N. On the development of a general purpose finite element program for analysis of forming process. International journal for numerical methods in engineering. 25: 113-131, 1988.
- [2] NAGTEGAAL, J.C. & JONG, J.E. Some computational aspects of elastic-plastic large strain analysis. International journal for numerical methods in engineering. 17: 15-41, 1981.
- [3] HUTCHINSON, J.W. Finite strain analysis of elastic-plastic solids and structures. ASME. Numerical solution of nonlinear structural problems. 1973. v. 17, p. 17-29.
- [4] HIBBIT, H.D. et alli. A finite element formulation for problems of large strain and large displacement. International journal of solids and structures. 6: 1069-1086, 1970.
- [5] McMEEKING, R.M. & RICE, J.R. Finite element formulations for problems of large elastic-plastic deformation. International journal of solids and structures. 11: 601-616, 1975.
- [6] WANG, N.M. & BUDIANSKY, B. Analysis of sheet metal stamping by a finite element method. Journal of applied mechanics. 45: 73-83, 1978.
- [7] GADALA, M.S. et alli. Formulation methods of geometric and material nonlinearity problems. International journal for numerical methods in engineering. 20: 887-914, 1987.
- [8] SPILCKER, R.L. & MUNIR, N.I. Elastic-plastic analysis of plates by the hybrid-stress model and initial stress approach. International journal for numerical methods in engineering. 17: 1791-1810, 1981.
- [9] HRABOK, M.M. & HRUDEY, T.M. A review and catalogue of plate

bending finite elements. Computer & structures. 19: 479-495, 1984.

[10] MATTHIES, H. & STRANG, G. The solution of nonlinear finite element equations. International journal for numerical methods in engineering. 14: 1613-1626, 1979.

[11] SPILKER, R.L. & PIAN, T.H.H. Hybrid-stress models for elastic-plastic analysis by the initial-stress approach. International journal for numerical methods in engineering 14: 359-378, 1979.

[12] MOURÃO, R.P. & SELKE, C.A.C. Um elemento finito de casca para a análise de problemas com não linearidade geométrica. VII SIMPÓSIO BRASILEIRO SOBRE TUBULAÇÕES E VASOS DE PRESSÃO. 1992. v. 1, p. 137-149.

[13] KIM, H.O. A Finite element formulation based on nadai's deformation theory for elasto plastic analysis. International journal for numerical methods in engineering. 17: 1861-1876, 1981.

[14] CHANDRA, A. A generalized finite element analysis of sheet metal forming with an elastic-viscoplastic material model. Journal of engineering for industry. 108: 9-15, 1986.

[15] DINIS, L.M.S. & OWEN, D.R. Elasto-viscoplastic and elasto-plastic large deformation analysis of thin plates and shells. International journal for numerical methods in engineering. 18: 591-607, 1982.

[16] ORTIZ, M. & SIMO, J.C. An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. International journal for numerical methods in engineering. 23: 353-366, 1986.

[17] WANG, N.M. et alli. Analysis of bending effects in sheet

forming operations. International journal for numerical methods in engineering. 25: 253-267, 1988.

[18] SIMO, J.C. et alli. Mixed finite element approximations for non linear plates. ASME. AMD 54. 1983. p. 227-236.

[19] NAGTEGAAL, J.C. & SLATER, J.G. A simple noncompatible thin shell element based on discret Kirchhoff theory. ASME. AMD 48. 1981. p. 167-192.

[20] PARISH, H. Nonlinear analysis of shells using isoparametric elements. ASME. AMD 48. 1981. p. 47-63.

[21] KIKUCHI, N. & CHENG, J.H. Finite element analysis of large deformation problems including unilateral contact and friction. ASME. AMD 54. 1983. p. 121-132.

[22] IRONS, B.M. The Semiloof shell element. In: Finite elements for thin shells and curved member. London. R. H. Gallagher and D.G. Ashwell, Willey. 1976.

[23] MacNEAL, R.H. A simple quadrilateral shell element. Computer & structures. 8: 175-183, 1978.

[24] OWEN, D.R.J. & FIGUEIRAS J.A. Elasto-plastic analysis of anisotropic plates and shells by the Semiloof element. International journal for numerical methods in engineering. 19: 521-539, 1983.

[25] OWEN, D.R.J. & FIGUEIRAS, J.A. Anisotropic elasto-plastic finite element analysis of thick and thin plates and shells. International journal for numerical methods in engineering. 19: 541-546, 1983.

[26] ROBINSON, M. A comparison of yield surfaces for thin shells. International journal of mechanical science. 13: 345-354, 1971.

[27] GERMAIN Y. et alli. A rigid-visclopastic finite element program for sheet metal forming analysis, International journal

for mechanical science. 31: 1-24, 1989.

[28] BELYTSCHKO, T. & WONG, B. Assumed strain stabilization procedure for the 9-node lagrange shell element. International journal for numerical methods in engineering. 28: 385-414, 1989.

[29] ABAYAKOON, S.B.S. Large deflection elastic-plastic analysis of plate structures by the finite strip method. International journal for numerical methods in engineering. 28: 331-358, 1989.

[30] WING, K.L. et alli. Resultant-stress degenerated-shell element. Computer methods in applied mechanics and engineering. 55: 259-300, 1985.

[31] AHMAD, S. et alli. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. International journal for numerical methods in engineering. 2: 419-451, 1970.

[32] BALMER, H.A. & DOLTSINIS, J. St. Extensions to the elastoplastic analysis with the Aska program system. Computer methods in applied mechanics and engineering. 13: 363-401, 1978.

[33] PARISH, H. Large displacements of shells including material nonlinearities. Computer methods in applied mechanics and engineering. 27: 183-214, 1981.

[34] HILL, R. Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time. Journal of the mechanics and physics of solids. 7: 209-225, 1959.

[35] BATHE, K.J. & CIMENTO, A.P. Some practical procedures for the solution of nonlinear finite element equations. Computer methods in applied mechanics and engineering. 22: 59-85, 1980.

[36] YANG, T.Y. & SAIGAL, S. A curved quadrilateral element for static analysis of shells with geometric and material nonlinearities. International journal for numerical methods in

engineering. 21: 617-635, 1984.

[37] PATULA, E.J. The tension-roller-leveling process elongation and power loss. Journal of engineering for industry. 101: 269-277, 1979.

[38] THOMPSON, N.E. New results in the theory of tension levelling. Proceedings of the first international conference on technology of plasticity. Tokyo. v. 1, p. 587-592, 1984 (Advanced Technology of Plasticity).

[39] STARK, G.K. A comparison of tension leveling theories. Journal of engineering for industry. 108: 154-155, 1986.

[40] PANKNIN, W. et alli. Research into the levelling, straightening and flexing of coiled strip material and its effect on surface finish. Sheet metal industries. p. 578-585, oct. 1973.

[41] KURT STENUDD, M.E. Calculating the setting of a press feed straightner/leveller. Sheet metal industries. p. 946-951, oct. 1979.

[42] KINNAVY, M.G. Recent developments in tension leveling. Iron and steel engineer. p. 67-72, nov. 1972.

[43] PFEILSTICKER, G.K. & BURETA, A.C. Regulagem da desempenadeira leve da Tesoura a Frio 2 na Cosipa. Metalurgia - ABM. 42(388): 15-18, 1986.

[44] BELLO, P. et alli. Theory and operation of the tension levelling process on a pickling line and on a coating line. Deauville, France. v. 2, p. E44.1-E44.2, 1987 (The science and technology of flat rolling).

[45] SENDZIMIR, M.G. & CIVIDINO, H. Tension leveller for multi-roll mills. 4th International steel rolling conference. Deauville, France. v. 2, p. E42.1-E42.6, 1987 (The science and

technology of flat rolling).

[46] HANAKI, K., KATO, K. Pressure peak in bending and unbending process. Proceedings of the first international conference on technology of plasticity. Tokyo. p. 581-586 1984

(Advanced Technology of Plasticity).

[47] YOSHIKAWA, K. et alii. High speed hydrotension leveler for shape correction of strip. Iron and steel engineer. p. 35-40, mar. 1983.

[48] KAWAGUCHI, K. High speed hidro-tension for a thin hard metal strip. International conference on steel rolling, proceedings. Tokyo. v. 2, p. 784-795, 1980.

[49] ISHIKAWA, T. et alii. Analytical

approach to occurrence and suppression of flatness defect on strip rolling. 4th International steel rolling conference. Deauville, France. v. 2, p. E.7.1-E.7.10, 1987 (The science and technology of flat rolling)

[50] SHEPARD, T. & ROBERTS, J.M. Stress/strain relationships for strip shape correction processes. Journal of the institute of metals. 99: 223-228, 1971.

[51] ROBERTS, J.M. & SHEPPARD, T. On the mechanics of tension-levelling process. Journal of the institute of metals. 19: 293-301, 1971.

[52] SHEPPARD, T. & ROBERTS, J.M. On the strip-to-roll conformity in the tension levelling process. The institute of metals. 100: 130-135, 1972.

[53] KLEIBER, M. Incremental finite element modelling in non-linear solid mechanics. Ellis Horwood Limited, 1989.

[54] WASHIZU, K. Variational methods in elasticity and plasticity. Ed. Pergamon Press, 1974.

- [55] BATHE, K.J. Finite element procedures in engineering analysis. Prentice-Hall, 1982.
- [56] CHEN, W.F. & HAN, D.J. Plasticity for structural engineers. Springer Verlag, 1988.
- [57] OWEN, D.R.J. & HINTON, E. Finite elements in plasticity. Pineridge Press Limited, 1980.
- [58] ZIENKIEWICZ, O.C. The finite element method. McGraw-Hill, 1977.
- [59] MALVERN, L.E. Introduction to the mechanics of a continuous medium. Prentice-Hall, 1969.
- [60] BUDIANSKY, B. A reassessment of deformation theories of plasticity. Journal of Applied Mechanics (Transactions of ASME) 26: 259-264, 1959.
- [61] COOK, R. D. Concepts and applications of finite element analysis. John Wiley & Sons, 1974.
- [62] MacNEAL, R. H. & HARDER, R. L. A proposed standart set of problems to test finite element accuracy. Finite elements in analysis and design. 1: 3-20, 1985.
- [63] HUANG, H. C. & HINTON E. A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation. International journal for numerical methods in engineering. 22: 73-92, 1986.
- [64] SURANA, K. S. Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements. International journal for numerical methods in engineering. 19: 581-615, 1983.
- [65] TIMOSHENKO, S. & KRIEGER, S.W. Theory of plates and shells. McGraw-Hill Book Company Inc, 1959.
- [66] BELYTSCHKO, T. Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements. Computer methods in applied

mechanics and engineering. **51**: 221-258, 1985.

[67] SIMO, J.C. & PISTER K.S. Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems: computational implications. Computer methods in applied mechanics and engineering. **46**: 201-215, 1984.

[68] MOSS, W.C. On instabilities in large deformation simple shear loading. Computer methods in applied mechanics and engineering. **46**: 329-338, 1984.

[69] CRISFIELD, M.A. A faster modified Newton-Raphson iteration. Computer methods in applied mechanics and engineering. **20**: 267-278, 1979.

[70] RIKS, E. Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures. Computer methods in applied and engineering. **47**: 219-259, 1984.

[71] RIKS, E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. International Journal of Solids and Structures **15**: 529-551, 1979.

[72] CRISFIELD, M.A. A fast incremental iterative solution procedure that handles "snap-through". Computers & Structures **13**: 55-62, 1982.

[73] MOURÃO, R.P. Um elemento finito de casca para a análise de problemas com não-linearidade geométrica. Dissertação de mestrado, UFSC. 1991.